Probabilités conditionnelles

⋆ <u>Exercice 1</u>

Un algorithme de détection de fraudes a été rédigé. Parmi toutes les fraudes, il en détecte 80 pour-cents. Il détecte un problème sur 10 pour-cents des dossiers étudiés et, parmi les cas qu'il détecte, 50 pour-cents sont effectivement des fraudes.

1. Calculer la probabilité qu'un dossier soit détecté et frauduleux.
2. En déduire la probabilité qu'un dossier soit frauduleux.

⋆ <u>Exercice 2</u> *Arbre de probabilités*

Une urne A contient quatre boules rouges et cinq boules noires. Une urne B contient trois boules rouges et cinq boules noires. On prélève au hasard une boule de l'urne A, que l'on place dans l'urne B. On prélève alors une boule de l'urne B.

Sachant que le second tirage a permis d'obtenir une boule rouge, quelle est la probabilité qu'une boule rouge ait été tirée de l'urne A ?

⋆ <u>Exercice 3</u> *Arbre de probabilités*

Un test de dépistage d'un virus a été mis au point par un laboratoire. Le laboratoire donne les caractéristiques suivantes :

- La probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de $0,98$.
- La probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de $0,01$.

On procède à un test de dépistage systématique dans une certaine population pour laquelle la proportion d'individus atteints par le virus est $p \in [0;1]$.

On définit les événements ci-dessous

V : "l'individu est atteint par le virus"
T : "le test sur l'individu est positif"

1. En utilisant un arbre de probabilités, exprimer $\mathbb{P}(T)$ en fonction de p.

2. Démontrer que la probabilité conditionnelle de V sachant T est donnée par

$$\mathbb{P}_T(V) = \frac{98p}{97p+1}$$

⋆ **<u>Exercice 4</u>** *Arbre de probabilités*

On s'intéresse ici à la probabilité qu'un salarié d'une entreprise soit absent pour cause de maladie durant une période d'épidémie de grippe. On fait les hypothèses suivantes :

- Si le salarié est malade alors il est absent.
- Le salarié n'est jamais malade la première semaine.
- Un salarié non malade en semaine $n \geqslant 1$ peut tomber malade à la semaine suivante avec une probabilité de $0,04$.
- Un salarié malade en semaine n reste malade la semaine suivante avec une probabilité de $0,24$.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement E_n : "le salarié est absent lors de la semaine n pour cause de maladie". On note aussi :

$$p_n = \mathbb{P}(E_n)$$

1. En utilisant un arbre de probabilités, déterminer la valeur de p_3.

2. Sachant que le salarié est absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

3. En généralisant les considérations précédentes aux semaines n et $n+1$, montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donnée par

$$p_{n+1} = 0,2\,p_n + 0,04 \text{ avec } p_1 = 0$$