Géométrie du plan : produit scalaire et applications

Première option mathématiques

J'ai résumé le cours de géométrie au programme de l'option mathématiques en première. Les définitions et propositions qui suivent correspondent aux connaissances attendues et devant être maitrisées par les lycéens. Les preuves des propositions ne sont pas écrites ; seules les démonstrations au programme, c'est à dire à savoir refaire par les élèves, sont détaillées en annexe.

Maxime Baczyk

Table des matières

1 Produit scalaire

Ce premier chapitre traite du produit scalaire et de ses propriétés importantes. La situation d'orthogonalité est notamment caractérisée à partir de celui-ci.

On considère un plan muni d'un repère orthonormé.

1.1 Définition et expressions du produit scalaire

1.1.1 Définition du produit scalaire

Voici ci-dessous deux définitions géométriques préliminaires concernant l'angle de deux vecteurs et la norme d'un vecteur.

• **Définition 1.** [Angle entre deux vecteurs]

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
L'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'angle formé par deux représentants de même origine des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On le note $(\vec{u}, \vec{v})$.

L'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ se mesure en radians. Par exemple, si les deux vecteurs sont colinéaires, on a $(\vec{u}, \vec{v}) = 0\ [2\pi]$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi\ [2\pi]$.

• **Définition 2.** [Norme d'un vecteur]

Soient $\vec{u}$ un vecteur du plan et A, B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La norme de $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la longueur AB.

La norme d'un vecteur est donc simplement sa longueur.

On peut maintenant définir le produit scalaire de deux vecteurs :

• **Définition 3.** [Produit scalaire de deux vecteurs]

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans le plan.
Si les deux vecteurs sont non nuls, le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})}$$

et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si l'un des vecteurs est nul.

On obtient donc, avec cette définition, la relation suivante :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

Notons également que la définition ci-dessus implique $\vec{u} \cdot \vec{v} = \pm \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ lorsque

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Si l'un des vecteurs est nul, alors le produit scalaire est égal à zéro. Cependant, comme cela sera expliqué dans la suite, il est important de souligner que la réciproque de cette propriété est fausse (voir la partie 1.2.2 sur l'orthogonalité).

• **Définition 4.** [Carré scalaire d'un vecteur]

Soit $\vec{u}$ un vecteur.
Le carré scalaire de $\vec{u}$, noté $\vec{u}^2$, s'identifie à $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.

Une conséquence directe est que le carré scalaire d'un vecteur est égal à sa norme au carré.

▶ **Proposition 1.** [Lien entre carré scalaire et norme]

Soient $\vec{u}$ un vecteur et A, B deux points.
On a alors

$$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$
$$\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$$

1.1.2 Autres expressions du produit scalaire

Le produit scalaire peut aussi s'exprimer à partir du projeté orthogonal dont la définition est la suivante :

• **Définition 5.** [Projeté orthogonal d'un point sur une droite]

Soient M un point et (d) une droite.
Le projeté orthogonal du point M sur la droite (d) est le point d'intersection de (d) avec la droite perpendiculaire à (d) passant par M.

Il est alors possible d'établir une propriété utile afin d'exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

▶ **Proposition 2.** [Produit scalaire à partir du projeté orthogonal]

Soient A, B et C trois points avec $A \neq B$. Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
Alors

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \pm AB \times AH}$$

avec le signe $+$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de mêmes sens et le signe $-$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens opposés.

On obtient la dernière égalité ci-dessus puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont nécessairement colinéaires.

On donne maintenant une autre expression du produit scalaire valable en géométrie repérée et très utile en pratique.

⧫ **Théorème 1.** [Produit scalaire dans un repère orthonormé]
Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthonormé.
Alors

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{u}' = xx' + yy'}$$

On peut déduire de cette propriété l'expression de la norme d'un vecteur dans un plan muni d'un repère. On a en effet, d'après la proposition 1, $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$ et donc, si $\vec{u} = (x; y)$, on obtient $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$ avec le théorème ci-dessus. Ce qui donne finalement :

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

1.2 Propriétés du produit scalaire

1.2.1 Propriétés importantes

On en vient à deux propriétés fondamentales du produit scalaire. Celui-ci est symétrique si l'on échange les deux variables (c'est à dire les deux vecteurs) et linéaire par rapport à chacune des variables.

► **Proposition 3.** [Symétrie et bilinéarité du produit scalaire]
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs et λ un réel.
Alors

$$\begin{aligned} &\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \\ &\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda\, \vec{u} \cdot \vec{v} \\ &\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

Dans cette proposition, on a présenté la linéarité par rapport à la variable de droite ; comme le produit scalaire est symétrique, cela implique bien entendu la linéarité également dans la variable de gauche : on a $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda\, \vec{u} \cdot \vec{v}$ et $(\vec{u} + \vec{w}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{v}$. Ainsi, puisque le produit scalaire est linéaire par rapport aux deux vecteurs, on parle de bilinéarité.

On souligne que ces propriétés fondamentales impliquent également des identités remarquables avec les vecteurs. On peut, en effet, facilement montrer que :

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$$
$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$$
$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

Ces identités permettent notamment d'établir les formules suivantes :

▶ **Proposition 4.** [Produit scalaire à partir des normes]

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
Alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$$

1.2.2 Orthogonalité

La notion d'orthogonalité est fondamentale en géométrie. On donne dans un premier temps la définition de l'orthogonalité pour deux vecteurs du plan.

• **Définition 6.** [Vecteurs orthogonaux]

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux si l'un des deux vecteurs est nul ou s'ils dirigent des droites perpendiculaires.

Le vecteur nul est donc, par définition, orthogonal à tout vecteur.

Voici, enfin, une propriété majeure du produit scalaire qui caractérise l'orthogonalité :

⧫ **Théorème 2.** [Condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité]

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
Alors ils sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

2 Géométrie repérée : droites et cercles

On consacre ce chapitre à caractériser les droites et les cercles dans un plan muni d'un repère orthonormé. On discute en particulier les équations cartésiennes de droites et de cercles.

2.1 Droites du plan

2.1.1 Rappels sur les droites

On rappelle tout d'abord certaines notions concernant les droites déjà abordées en classe de seconde.

La définition d'une droite en termes de vecteurs colinéaires est donnée ci-dessous.

• **Définition 7.** [Droite (AB)]

Soient A et B deux points distincts du plan.
La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que A, B et M soient alignés. Autrement dit, c'est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires.

On rappelle également ce qu'est un vecteur directeur d'une droite.

• **Définition 8.** [Vecteur directeur d'une droite]

Soit (AB) une droite du plan.
On appelle vecteur directeur de la droite (AB) tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Dans un repère donné, une droite est caractérisée par son équation réduite qui est unique. Cette dernière prend une forme différente selon les cas suivants :

- La droite est non parallèle à l'axe des ordonnées du repère.
- La droite est parallèle à l'axe des ordonnées du repère (droite verticale).

Le premier cas englobe, bien entendu, les droites parallèles à l'axe des abscisses (droites horizontales).

On distingue ces deux situations dans la suite.

★ **Théorème/Définition 1.** [Équation réduite d'une droite non verticale]

Soit (d) une droite non parallèle à l'axe des ordonnées du repère.
Alors (d) est décrite par une équation de la forme

$$\boxed{y = mx + p}$$

où m et p sont deux coefficients réels. Cette équation est unique et est appelée équation réduite de la droite (d).

Et réciproquement :

Toute équation de la forme $y = mx + p$ avec $m, p \in \mathbb{R}$ décrit une unique droite non parallèle à l'axe des ordonnées de repère.

Les réels m et p sont respectivement appelés coefficient directeur et ordonnée à l'origine de la droite. Celle-ci coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; p)$ et admet le vecteur $(1; m)$ comme vecteur directeur.

Soulignons que ces droites correspondent aux représentations graphiques des fonctions affines.

On passe maintenant au second cas.

★ **Théorème/Définition 2.** [Équation réduite d'une droite verticale]

Soit (d) une droite parallèle à l'axe des ordonnées du repère.
Alors (d) est décrite par une équation de la forme

$$\boxed{x = k}$$

où k est un paramètre réel. Cette équation est unique et est appelée équation réduite de la droite (d).

Et réciproquement :

Toute équation de la forme $x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$ décrit une unique droite parallèle à l'axe des ordonnées de repère.

Les droites parallèles à l'axe des ordonnées admettent en particulier $(0; 1)$ comme vecteur directeur. Plus généralement, tout vecteur de coordonnées $(0; \lambda)$ avec $\lambda \neq 0$ est un vecteur directeur de la droite.

Notons que ces dernières ne représentent pas des fonctions puisqu'elles présentent plusieurs points (une infinité) de même abscisse.

Dans les deux cas précédemment étudiés, on peut toujours se ramener à une équation plus générale (mais non unique) de la forme suivante :

$$ax + by + c = 0$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Ceci est une équation dite équation cartésienne de la droite.

★ **Théorème/Définition 3.** [Équation cartésienne d'une droite]

Soit (d) une droite du plan.
Alors (d) peut être décrite par une équation de la forme

$$\boxed{ax + by + c = 0} \tag{5}$$

où a, b et c sont trois coefficients réels avec a et b non tous deux nuls. Cette équation est appelée équation cartésienne de la droite (d).

Et réciproquement :

Toute équation de la forme $ax+by+c=0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $(a; b) \neq (0; 0)$ décrit une droite dans le plan.

Il est possible de déduire directement de l'équation cartésienne de la droite un vecteur directeur.

De façon réciproque, on peut aussi établir une équation cartésienne d'une droite en connaissant un de ses vecteurs directeurs et un point lui appartenant.

► **Proposition 5.** [Vecteur directeur et équation cartésienne d'une droite]

Soit (d) une droite du plan. Soient a, b et c trois réels tels que a et b sont non tous deux nuls.
Alors (d) est décrite par une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ si et seulement si le vecteur $\vec{u} = (-b; a)$ est un de ses vecteurs directeurs.

2.1.2 Vecteur normal à une droite

Une nouvelle notion abordée en classe de première est celle de vecteur normal à une droite. Les coordonnées de ce dernier sont également reliées à l'équation cartésienne.

• **Définition 9.** [Vecteur normal à une droite]

Soient (d) une droite et $\vec{n}$ un vecteur.
Le vecteur $\vec{n}$ est dit vecteur normal à la droite (d) s'il est non nul et s'il est orthogonal à un vecteur directeur de (d).

La direction d'un vecteur normal est donc perpendiculaire à la droite.

Notons qu'un vecteur normal à une droite (d) est nécessairement orthogonal à tous les vecteurs directeurs de (d).

▶ **Proposition 6.** [Droites perpendiculaires et vecteurs normaux]

Soient (d) et (d') deux droites.
Alors (d) et (d') sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de (d) est orthogonal à un vecteur normal de (d').

Le lien entre les coordonnées d'un vecteur normal et l'équation cartésienne est le suivant :

▶ **Proposition 7.** [Vecteur normal et équation cartésienne d'une droite]

Soit (d) une droite du plan. Soient a, b et c trois réels tels que a et b sont non tous deux nuls.
Alors (d) est décrite par une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ si et seulement si le vecteur $\vec{n} = (a; b)$ est un de ses vecteurs normaux.

On vérifie effectivement que $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ pour $\vec{n} = (a; b)$ et $\vec{u} = (-b; a)$. Ces deux vecteurs sont donc bien orthogonaux.

2.2 Cercles

2.2.1 Définition d'un cercle à partir de son centre et son rayon

On s'attache à définir un cercle à partir de son centre et de son rayon. Tout comme les droites, on le caractérisera par une équation dans un repère orthonormé du plan.

• **Définition 10.** [Cercle de centre C et de rayon r]

Soient C un point et r un réel strictement positif.
Le cercle de centre C et de rayon r est l'ensemble des points M tels que $CM = r$.

L'égalité $CM = r$ est équivalente à $\overrightarrow{CM}^2 = r^2$. En utilisant les coordonnées de M et du centre C, ainsi que la formule pour la norme d'un vecteur donnée dans la partie 1.1.2, on obtient le théorème qui suit.

★ **Théorème/Définition 4.** [Équation cartésienne d'un cercle]

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre C de coordonnées $(x_0; y_0)$ et de rayon $r > 0$. Alors $\mathcal{C}$ peut être décrit par une équation de la forme

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$$

Cette équation est appelée équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

Et réciproquement :

Toute équation de la forme $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R$ avec $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ et $R > 0$ décrit un cercle de centre $(x_0; y_0)$ et de rayon $r = \sqrt{R}$.

2.2.2 Définition d'un cercle à partir de son diamètre

On peut aussi caractériser un cercle par un segment $[AB]$ qui constitue son diamètre. Le centre s'identifie alors au milieu du segment et le rayon est $r = AB/2$.

► **Proposition 8.** [Définition d'un cercle à partir de son diamètre]

Soient A et B deux points distincts du plan.
Alors l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est un cercle de diamètre $[AB]$.

Autrement dit, un triangle MAB est rectangle en M si et seulement si celui-ci est inscrit dans un cercle de diamètre $[AB]$.

On discute pour finir l'intersection entre un cercle et une droite du plan.

► **Proposition 9.** [Intersection d'un cercle et d'une droite]

Soient (d) une droite et $\mathcal{C}$ un cercle.
Alors l'intersection de (d) et $\mathcal{C}$ correspond à un ensemble constitué de un ou deux points, ou à un ensemble vide.

3 Configurations géométriques : triangles

On s'intéresse dans ce chapitre à une configuration géométrique particulière : le triangle. Après quelques rappels, les théorèmes de la médiane et d'AL-KASHI sont abordés. Ceux-ci constituent en effet deux résultats importants en géométrie plane.

3.1 Théorème de la médiane

3.1.1 Rappels et compléments sur les médianes d'un triangle

On commence par rappeler la définition d'une médiane dans un triangle.

• **DÉFINITION 11.** [Médiane d'un triangle]

Soit un triangle.
Une médiane du triangle est une droite passant par un de ses sommets et par le milieu du coté opposé.

Les médianes d'un triangle se coupent en l'isobarycentre des trois sommets encore appelé centre de gravité du triangle. On peut définir ce dernier à partir d'une égalité vectorielle :

• **DÉFINITION 12.** [Centre de gravité d'un triangle]

Soit ABC un triangle.
Le centre du gravité du triangle ABC est l'unique point G tel que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Voici maintenant le résultat important déjà énoncé sur l'intersection des médianes.

⧫ **THÉORÈME 3.** [Intersection des médianes d'un triangle]

Soit un triangle.
Alors les trois médianes sont concourantes et leur point d'intersection est le centre de gravité du triangle.

Notons également que le centre de gravité est situé aux deux tiers des segments associés aux médianes à partir du sommet correspondant. Par exemple, dans un triangle ABC et en notant A' le milieu du segment $[BC]$ (la médiane issue de A est donc la droite (AA')), on a :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AA'}$$

3.1.2 Théorème de la médiane

On énonce maintenant le théorème d'Apollonius encore appelé théorème de la médiane qui regroupe trois identités relatives à un triangle quelconque.

♦ **Théorème 4.** [Théorème de la médiane]
Soient ABC un triangle quelconque et I le milieu du segment $[BC]$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AI^2 - BC^2/4 \\
AB^2 - AC^2 &= 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CB} \\
AB^2 + AC^2 &= 2AI^2 + BC^2/2
\end{aligned}$$

3.2 Théorème d'Al-Kashi

On termine le chapitre avec la loi des cosinus qui porte aussi les noms de théorème d'Al-Kashi ou de théorème de Pythagore généralisé. En effet, ce résultat concerne un triangle quelconque et permet de retrouver l'identité de Pythagore dans le cas particulier du triangle rectangle.

♦ **Théorème 5.** [Théorème d'Al-Kashi]
Soit ABC un triangle quelconque.
On a alors l'identité suivante :

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})}$$

Lorsqu'on considère un triangle rectangle en A, cette propriété implique :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

puisque $\widehat{BAC} = \pm\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et le cosinus de cet angle est donc nul. On retrouve puis le théorème de Pythagore.

A Restitution organisée de connaissances

Le programme de géométrie de l'option mathématiques en première ne comporte qu'une seule démonstration à connaitre : c'est celle de la proposition 8 du cours concernant la définition d'un cercle à partir de son diamètre.

On considère deux points distincts A et B, et soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. Soit M un point quelconque. On veut montrer

$$\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \quad\Leftrightarrow\quad M\in\mathcal{C}}$$

On présente ici deux démonstrations possibles de cette proposition.

<u>Démonstration I :</u>

On pose $(x_A;y_A)$ et $(x_B;y_B)$ les coordonnées respectives des points A et B, et $(x;y)$ celles du point M. On calcule alors les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$:

$$\overrightarrow{MA}=\begin{pmatrix}x_A-x\\ y_A-y\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{MB}=\begin{pmatrix}x_B-x\\ y_B-y\end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\\
\Leftrightarrow\quad&(x_A-x)(x_B-x)+(y_A-y)(y_B-y)=0\\
\Leftrightarrow\quad&x^2-x(x_A+x_B)+x_Ax_B+y^2-y(y_A+y_B)+y_Ay_B=0\\
\Leftrightarrow\quad&x^2-2\,x\frac{(x_A+x_B)}{2}+y^2-2\,y\frac{(y_A+y_B)}{2}=-(x_Ax_B+y_Ay_B)
\end{aligned}$$

On complète les carrés dans le membre de gauche. Ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\\
\Leftrightarrow\quad&\left(x-\frac{(x_A+x_B)}{2}\right)^2-\frac{(x_A+x_B)^2}{4}+\left(y-\frac{(y_A+y_B)}{2}\right)^2-\frac{(y_A+y_B)^2}{4}\\
&=-(x_Ax_B+y_Ay_B)\\
\Leftrightarrow\quad&\left(x-\frac{(x_A+x_B)}{2}\right)^2+\left(y-\frac{(y_A+y_B)}{2}\right)^2\\
&=\frac{(x_A+x_B)^2}{4}+\frac{(y_A+y_B)^2}{4}-(x_Ax_B+y_Ay_B)
\end{aligned}$$

Soit I le milieu du segment $[AB]$. On peut alors réécrire la dernière égalité à l'aide des coordonnées du point I.

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\\
\Leftrightarrow\quad&(x-x_I)^2+(y-y_I)^2=\frac{(x_A+x_B)^2}{4}+\frac{(y_A+y_B)^2}{4}-(x_Ax_B+y_Ay_B)
\end{aligned}$$

Le membre de gauche a bien la forme d'une équation cartésienne d'un cercle de centre I (voir le théorème/définition 4). Il suffit donc de montrer que le membre de droite de l'égalité ci-dessus est égal au rayon au carré pour achever la démonstration. Or, on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\frac{(x_A+x_B)^2}{4}+\frac{(y_A+y_B)^2}{4}-(x_Ax_B+y_Ay_B)\\
=&\frac{x_A^2+2x_Ax_B+x_B^2}{4}+\frac{y_A^2+2y_Ay_B+y_B^2}{4}-\frac{4x_Ax_B+4y_Ay_B}{4}\\
=&\frac{x_A^2-2x_Ax_B+x_B^2}{4}+\frac{y_A^2-2y_Ay_B+y_B^2}{4}\\
=&\frac{(x_A-x_B)^2}{4}+\frac{(y_A-y_B)^2}{4} = \frac{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}{4}\\
=&\frac{AB^2}{4} = \left(\frac{AB}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

En conclusion, on obtient

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\\
\Leftrightarrow\quad &(x-x_I)^2+(y-y_I)^2=\left(\frac{AB}{2}\right)^2\\
\Leftrightarrow\quad &M\in\mathcal{C}
\end{aligned}$$

Le résultat est démontré.

Démonstration II :

Cette deuxième version de la preuve de la proposition 8 est plus courte et plus astucieuse que la précédente ; elle ne nécessite pas l'introduction de coordonnées. On utilise toujours le point I, milieu du segment $[AB]$, et l'on procède par équivalence :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\\
\Leftrightarrow\quad &\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=0\\
\Leftrightarrow\quad &\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)=0\\
\Leftrightarrow\quad &\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2=0\\
\Leftrightarrow\quad &MI^2-IA^2=0\\
\Leftrightarrow\quad &MI^2=IA^2\\
\Leftrightarrow\quad &MI=IA\\
\Leftrightarrow\quad &MI=r\\
\Leftrightarrow\quad &M\in\mathcal{C}
\end{aligned}$$

avec $r=IA$ dans l'avant dernière ligne. On a utilisé une relation de Chasles avec le point I, l'égalité $\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IA}$ ainsi que l'identité remarquable vectorielle $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$ (voir section 1.2.1).