Démonstration par récurrence

⋆ Exercice 1

Démontrer par récurrence les propositions qui suivent

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(b) Soit q un réel différent de 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

(c) Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 1000$ et $U_{n+1} = 0,82\,U_n + 3,6$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$U_n = 980 \times 0,82^n + 20$$

(d) Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \sqrt{7\,U_n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leqslant U_n \leqslant 7$$

(e) Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = (5\,U_n + 3)/(U_n + 3)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$U_n = 3$$

(f) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $10^n - 1$ est un multiple de 9.

(g) Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n + 2n + 3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$U_n = (n+1)^2$$

(h) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 3.

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n < 2^n$.

⋆ **Exercice 2**

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

⋆ **Exercice 3**

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

⋆ **Exercice 4**

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a

$$(1 - \frac{1}{2^2}) \times (1 - \frac{1}{3^2}) \times \cdots \times (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$$