FEUILLE 12 - TERMINALE SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

Combinaisons II

⋆ **Exercice 1** *Calculs et arguments de dénombrement*

1. Calculer $\binom{n}{0}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Retrouver ce résultat par un argument de dénombrement.
2. Calculer $\binom{n}{1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Retrouver ce résultat par un argument de dénombrement.
3. Calculer $\binom{n}{2}$ pour tout $n \geqslant 2$. Retrouver ce résultat par un argument de dénombrement.
4. Soit $n \geqslant 2$. Calculer $\binom{n}{n}$, $\binom{n}{n-1}$ et $\binom{n}{n-2}$.
5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et k en entier inférieur ou égal à n. Que peut on dire de $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{n-k}$? Établir le résultat par calcul, puis le retrouver par un argument de dénombrement.

⋆ **Exercice 2** *Calcul et argument de dénombrement*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et k en entier inférieur ou égal à n.

Montrer par calcul que
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$
Retrouver ce résultat à l'aide d'un argument de dénombrement.

⋆ **Exercice 3** *Formule du triangle de Pascal*

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et k en entier inférieur ou égal à $n-1$.
   Montrer par calcul que
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$
2. Construire le triangle de Pascal et donner les valeurs de $\binom{6}{2}$ et $\binom{6}{3}$.
3. Retrouver le résultat de question 1 avec un argument de dénombrement.

⋆ **Exercice 4** *Somme des coefficients binomiaux*

Soient $n \in \mathbb{N}$. Démontrer avec un argument de dénombrement que
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$