Questions avancées sur le dénombrement

⋆ Exercice 1 *Dénombrement dans des expériences aléatoires*

On possède un dé à six faces, numérotées de 1 à 6.

1. On lance ce dé et on regarde le nombre du dessus. Combien cette expérience compte-t-elle d'issues ? Combien y a-t-il d'événements ?
2. On lance le dé six fois et on note à chaque lancer 1 si on obtient la face numérotée 1 et 0 dans les autres cas. On construit ainsi un 6-uplet de $\{0;1\}$. Combien y a-t-il d'issues possibles à cette expérience ?

   On considère l'événement E : « On a obtenu un nombre pair de fois le nombre 1. » Combien d'issues réalisent l'événement E ?

⋆ Exercice 2 *Décomposition de produit de facteurs premiers*

Soit n un entier naturel dont la décomposition en produits de facteurs premiers est

$$n = n_1^{p_1}\, n_2^{p_2} \cdots n_k^{p_k}$$

Par exemple,

$$18 = 2^1 \times 3^2$$

ou

$$25 = 5^2$$

1. Combien de diviseurs positifs possède 18 ? Et 25 ?
2. Dans le cas général, combien de diviseurs positifs possède n ?
3. Donner le nombre de diviseurs positifs de 120.
4. Quel est le plus petit entier naturel ayant exactement 35 diviseurs positifs et dont la décomposition en facteurs premiers fait intervenir au moins deux facteurs premiers distincts.

⋆ Exercice 3 *Démonstration de la formule du binôme*

On souhaite démontrer que, pour tous réels a et b et pour tout entier naturel non nul n,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

1. Démontrer que l'égalité est vraie pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

2. On souhaite démontrer l'égalité par récurrence. Pour tout entier naturel strictement positif n, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

On a donc déjà montré l'initialisation. Concernant l'hérédité, établir que

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{i+1} b^{k-1} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^i b^{k-i+1}$$

En remarquant que $(a+b)^{k+1} = (a+b)^k\,(a+b)$.

Justifier alors que la première somme du membre de droite vaut

$$\sum_{i'=1}^{k+1} \binom{k}{i'-1} a^{i'} b^{k-i'+1}$$

Et en déduire que

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} a^i b^{k-i+1} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^i b^{k-i+1}$$

On peut ajouter les deux sommes si les indices de sommation sont les mêmes. On va donc isoler les termes correspondant à $i = k+1$ dans la première somme et à $i = 0$ dans la seconde somme. En déduire que

$$(a+b)^k = a^{k+1} + b^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \left(\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} \right) a^i b^{k-i+1}$$

En utilisant la formule de Pascal, aboutir à

$$(a+b)^k = a^{k+1} + b^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} a^i b^{k+1-i}$$

Terminer le raisonnement afin de démontrer l'hérédité.

3. Application : pour tout $a \in \mathbb{R}$, développer $(a+2)^3$ et $(a+2)^5$.