Limites de suites : problèmes

⋆ **Exercice 1** *Somme partielle et suite arithmético-géométrique*

Soit la suite (U_n) telle que $U_0 = -1$ et $U_{n+1} = 0,2\,U_n + 0,6$ pour tout entier naturel n. Soit (V_n) définie par $V_n = U_n - 0,75$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que la suite (V_n) est géométrique.
2. En déduire V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.
3. En déduire la limite de la suite (U_n).
4. On définit la somme $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   Calculer S_n en fonction de n.
5. En déduire la limite de (S_n)

⋆ **Exercice 2** *Limite d'une somme*

Soit la suite (S_n) telle que $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

1. On considère un entier k compris entre 1 et n.
   Montrer que $\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 1$.
2. Montrer que $S_n \geqslant \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire la limite de (S_n).

⋆ **Exercice 3**

Soit la suite (U_n) telle que $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{n}{3} + 1$ pour tout entier naturel n.

1. Démontrer par récurrence que $U_n \leqslant n + 3$ pour tout entier naturel n.
2. Soit (V_n) telle que $V_n = U_n - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Montrer que (V_n) est géométrique.
3. En déduire V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de (U_n).

5. Soit la somme $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Calculer S_n en fonction de n.

6. Soit (T_n) définie pour tout $n \geqslant 1$ par $T_n = \frac{S_n}{n^2}$.
   Déterminer la limite de (T_n).

⋆ **Exercice 4**

Soient les suites (U_n) et (V_n) définies telles que $U_0 = 1$,

$$U_{n+1} = 2\,U_n - n + 3$$

et

$$V_n = 2^n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

2. En déduire la limite de la suite (U_n).

3. Démontrer que la suite (U_n/V_n) est décroissante à partir du rang $n = 3$.

4. On admet que $0 < n/2^n \leqslant 1/n$ pour tout $n \geqslant 4$. En déduire la limite de la suite (U_n/V_n).