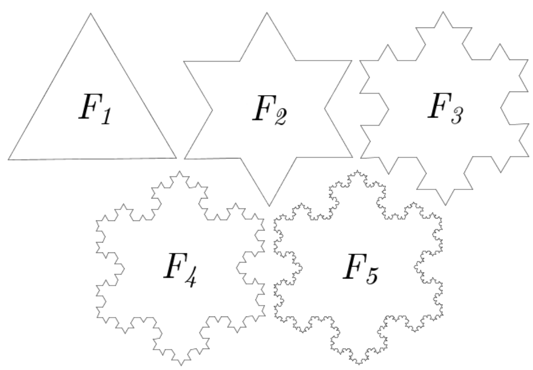
Feuille 8 - Terminale spécialité mathématiques

Questions avancées sur les suites et les limites de suites

$\star$ <u>Exercice 1</u> *Flocon de Von Koch*

On considère la construction récursive d'une figure du plan suivante : on part d'un triangle équilatéral de coté 1. Puis, on divise en trois chaque coté et, dans la partie du milieu de chaque coté (correspondant donc au second tiers), on ajoute un triangle équilatéral de coté 1/3. On procède de cette manière pour tous les cotés du triangle. On ré-itère cette construction jusqu'à l'infini.

Voici les 5 premières étapes de la construction du flocon :



Soient les suites (C_n), (L_n), (P_n) et (A_n) définies pour tout $n \geqslant 1$ et correspondant respectivement au nombre de cotés, à la longueur des cotés, au périmètre et à l'aire de la figure F_n.

1. Démontrer que l'aire d'un triangle équilatéral de coté a est égale à

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}\,a^2}{4}$$

2. Calculer C_1, L_1, P_1 et A_1.
3. Calculer C_2, L_2, P_2 et A_2.
4. Calculer C_3, L_3, P_3 et A_3.
5. Montrer que (C_n) est géométrique et exprimer C_n en fonction de n.
6. Montrer que (L_n) est géométrique et exprimer L_n en fonction de n.
7. En déduire une expression de P_n en fonction de n.

8. Montrer la relation de récurrence suivante :

$$A_{n+1} = A_n + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

9. En déduire A_n en fonction de n en calculant $(A_n - A_{n-1}) + (A_{n-1} - A_{n-2}) + \cdots + (A_2 - A_1)$ de deux manières.

10. Calculer les limites des suites (P_n) et (A_n).

$\star$ **<u>Exercice 2</u>** *Somme géométrique dans une équation*

On considère l'équation suivante :

$$1 + \left(\frac{2x}{x+3}\right) + \left(\frac{2x}{x+3}\right)^2 + \left(\frac{2x}{x+3}\right)^3 = 0$$

1. Préciser le domaine de l'équation.

2. Résoudre cette équation.

$\star$ **<u>Exercice 3</u>**

Soit la suite (U_n) telle que

$$U_n = n - \sqrt{(n+1)(n+2)}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que (U_n) converge vers $3/2$.