

Cardinal et produit cartésien

★ **Exercice 1**

Soient A l'ensemble des diviseurs positifs de 24 et B l'ensemble des diviseurs positifs de 42.

Lister les éléments de A et B et déterminer les cardinaux des ensembles A , B , $A \cup B$ et $A \cap B$.

★ **Exercice 2** *Complémentaire d'un ensemble*

Soient A et E deux ensembles finis avec $A \subset E$.

On définit le complémentaire de A dans E comme $\bar{A} = E \setminus A$ tel que $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = E$.

Montrer que $\text{card } \bar{A} = \text{card } E - \text{card } A$.

★ **Exercice 3** *Différence symétrique de deux ensembles*

Soient A et B deux ensembles finis.

On définit la différence symétrique de A et B par $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Montrer que $\text{card}(A \Delta B) = \text{card } A + \text{card } B - 2 \text{card}(A \cap B)$.

★ **Exercice 4**

Soient A et B deux ensembles finis et disjoints. On suppose que A est de cardinal 7 et B de cardinal 9.

Calculer $\text{card}(A \cup B)$ et $\text{card}(A \times B)$.

★ **Exercice 5**

Soient $A = \{1; 3; 7\}$ et $B = \{2; 3\}$.

Lister les éléments de $A \times B$ et de $B \times A$.

★ **Exercice 6**

Soient $E = \{\pi; \sqrt{2}; 4\}$.

Lister les éléments de E^2 .

★ **Exercice 7**

Soit $A = \{0; 1\}$.

Donner quatre 3-uplets d'éléments de A . Combien en existe-t-il ?

★ **Exercice 8**

Soient A et B deux ensembles finis et disjoints tels que $\text{card } A \cup B = 23$ et $\text{card } A \times B = 132$.

Déterminer les cardinaux de A et B sachant que $\text{card } A < \text{card } B$.

★ **Exercice 9**

Soient A et B deux ensembles finis tels que $\text{card } (A^3 \times B^2) = 3087$.

Déterminer les cardinaux de A et B .

★ **Exercice 10**

On considère les lettres A, B, C et D.

1. Combien de mots de quatre lettres peut-on écrire, ces lettres pouvant être utilisées plusieurs fois ? On ne fera pas attention au sens éventuel du mot.
2. Combien de mots de cinq ou six lettres peut-on écrire ?

★ **Exercice 11** *Démonstration*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A un ensemble fini.

Montrer par récurrence que $\text{card } A^n = (\text{card } A)^n$.