

**Cardinal et produit cartésien**★ **Exercice 1**

Soient  $A$  l'ensemble des diviseurs positifs de 24 et  $B$  l'ensemble des diviseurs positifs de 42.

Lister les éléments de  $A$  et  $B$  et déterminer les cardinaux des ensembles  $A$ ,  $B$ ,  $A \cup B$  et  $A \cap B$ .

★ **Exercice 2** *Complémentaire d'un ensemble*

Soient  $A$  et  $E$  deux ensembles finis avec  $A \subset E$ .

On définit le complémentaire de  $A$  dans  $E$  comme  $\bar{A} = E \setminus A$  tel que  $A \cap \bar{A} = \emptyset$  et  $A \cup \bar{A} = E$ .

Montrer que  $\text{card } \bar{A} = \text{card } E - \text{card } A$ .

★ **Exercice 3** *Différence symétrique de deux ensembles*

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles finis.

On définit la différence symétrique de  $A$  et  $B$  par  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

Montrer que  $\text{card}(A \Delta B) = \text{card } A + \text{card } B - 2 \text{card}(A \cap B)$ .

★ **Exercice 4**

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles finis et disjoints. On suppose que  $A$  est de cardinal 7 et  $B$  de cardinal 9.

Calculer  $\text{card}(A \cup B)$  et  $\text{card}(A \times B)$ .

★ **Exercice 5**

Soient  $A = \{1; 3; 7\}$  et  $B = \{2; 3\}$ .

Lister les éléments de  $A \times B$  et de  $B \times A$ .

★ **Exercice 6**

Soient  $E = \{\pi; \sqrt{2}; 4\}$ .

Lister les éléments de  $E^2$ .

★ **Exercice 7**

Soit  $A = \{0; 1\}$ .

Donner quatre 3-uplets d'éléments de  $A$ . Combien en existe-t-il ?

★ **Exercice 8**

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles finis et disjoints tels que  $\text{card } A \cup B = 23$  et  $\text{card } A \times B = 132$ .

Déterminer les cardinaux de  $A$  et  $B$  sachant que  $\text{card } A < \text{card } B$ .

★ **Exercice 9**

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles finis tels que  $\text{card } (A^3 \times B^2) = 3087$ .

Déterminer les cardinaux de  $A$  et  $B$ .

★ **Exercice 10**

On considère les lettres A, B, C et D.

1. Combien de mots de quatre lettres peut-on écrire, ces lettres pouvant être utilisées plusieurs fois ? On ne fera pas attention au sens éventuel du mot.
2. Combien de mots de cinq ou six lettres peut-on écrire ?

★ **Exercice 11** *Démonstration*

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A$  un ensemble fini.

Montrer par récurrence que  $\text{card } A^n = (\text{card } A)^n$ .