Introduction aux suites numériques

⋆ **Exercice 1**

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $U_n = n^2 - 2n$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite.
2. Déterminer les entiers n tels que $U_n = 624$.

⋆ **Exercice 2**

Soient les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies telles que

$$U_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

et

$$\begin{cases} V_{n+1} = V_n + 3\,n + 2 \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \\ V_1 = 2 \end{cases}$$

Calculer les quatre premiers termes de (U_n) et de (V_n).

⋆ **Exercice 3** *Conjecturer une formule explicite*

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 1$ et la formule de récurrence suivante

$$U_{n+1} = U_n + 2n + 3$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer les six premiers termes de la suite.
2. Conjecturer une formule explicite pour U_n, c'est à dire, exprimer U_n en fonction de n.

⋆ **Exercice 4**

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $U_n = n^2 - 3n + 1$.

Exprimer U_{n-1}, U_{n+1}, $U_n + 1$ et U_{2n} en fonction de n.

⋆ **Exercice 5** *Suites issues de problèmes concrets*

Pour chacune des suites associées aux problèmes ci-dessous, donner le premier terme de la suite U_0 ainsi que la relation de récurrence qui exprime U_{n+1} en fonction de U_n :

$$U_{n+1} = f(U_n)$$

(a) On s'intéresse à un escalier dont chaque marche a une hauteur de 11 cm. Soit la suite (U_n) telle que U_n est la hauteur à laquelle on s'élève après avoir monté n marches de l'escalier (avec $n \in \mathbb{N}$).

(b) Une tôle d'acier d'épaisseur 0,3 mm est pliée en deux obtenant ainsi une épaisseur de 0,6 mm. On poursuit ensuite le pliage pour avoir une épaisseur de 1,2 mm, et ainsi de suite. Soit la suite (U_n) telle que U_n est l'épaisseur de tôle obtenue après n pliages (avec $n \in \mathbb{N}$).

(c) Soit une substance radioactive qui perd $14,5$ pour-cents de sa masse chaque année. La masse initiale de la substance radioactive est de 90 g. Soit la suite (U_n) telle que U_n est la masse de la substance au bout de n années (avec $n \in \mathbb{N}$).

(d) Paul débute dans une entreprise avec un salaire mensuel de 1650 euros. Il est prévu dans son contrat une augmentation mensuelle de 12 euros à partir de second mois. Soit la suite (U_n) telle que U_n est le salaire de Paul à la fin du $(n+1)$ème mois (où $n \in \mathbb{N}$).

(e) Un pays possède une population de 30 millions d'habitants en 2019. Il y a un accroissement de la population de 10 pour-cents par an ainsi que l'arrivée d'un million d'immigrés chaque année. Soit la suite (U_n) telle que U_n est le nombre d'habitants du pays en millions à l'année $2019 + n$ (avec $n \in \mathbb{N}$).

⋆ **Exercice 6** *Conjecturer une formule explicite*

Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $V_0 = 0$ et la formule de récurrence suivante

$$V_{n+1} = \sqrt{1 + V_n^2}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite.
2. Conjecturer une formule explicite pour V_n, c'est à dire, exprimer V_n en fonction de n.

⋆ **<u>Exercice 7</u>** *Déterminer une formule explicite et une formule de récurrence*

On considère ici des suites où les premiers termes sont donnés explicitement :

$$(A_n) = (1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; \cdots)$$
$$(B_n) = (0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; \cdots)$$
$$(C_n) = (1; -1; 1; -1; 1; -1; 1; \cdots)$$

Pouvez-vous donner une formule de récurrence et une formule explicite pour chacune de ces trois suites ?