Études de suites et initiation à la limite

$\star$ **Exercice 1**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie telle que

$$U_n = 5 + \frac{3}{2n+1}$$

1. Calculer les cinq premiers termes de (U_n).
2. Émettre une conjecture sur le sens de variation de (U_n).
3. Démontrer la conjecture précédente.
4. Déterminer le plus petit entier n tel que $|U_n - 5| \leqslant 0,001$.
5. Émettre une conjecture quant-à la limite de la suite (U_n).

$\star$ **Exercice 2**

Soient $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$V_n = 3 \times 2^n \quad \text{et} \quad W_n = 3 + (\frac{1}{2})^n$$

1. Calculer les cinq premiers termes de (V_n) et de (W_n).
2. Émettre des conjectures sur les sens de variation de (V_n) et de (W_n).
3. Démontrer les conjectures précédentes.
4. Émettre des conjectures sur les limites des suites (V_n) et (W_n).

$\star$ **Exercice 3**

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie telle que

$$\begin{cases} U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ U_0 = 5 \end{cases}$$

1. A l'aide d'une graphe en escalier, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (U_n).

2. On admet que $U_n \geqslant 2$ pour tout entier naturel n. Démontrer la conjecture sur le sens de variation.

⋆ **Exercice 4**

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie telle que

$$S_n = \frac{n^2+1}{2n^2}$$

1. Calculer les cinq premiers termes de (S_n).
2. Émettre une conjecture sur le sens de variation de (S_n).
3. Démontrer la conjecture précédente.
4. Déterminer le plus petit entier $n > 0$ tel que $|S_n - 0,5| \leqslant 0,001$.
5. Émettre une conjecture quant-à la limite de la suite (S_n).

⋆ **Exercice 5**

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie telle que

$$\begin{cases} T_{n+1} = \frac{1}{2}T_n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ T_0 = 1 \end{cases}$$

1. Représenter les premiers termes de cette suite avec une graphique en escalier.
2. A l'aide de ce graphique, pouvez-vous émettre des conjecture sur le sens de variation et la limite de la suite (T_n) ?