Trigonométrie circulaire élémentaire
et
fonctions trigonométriques

Première option mathématiques

Je résume ici les cours de trigonométrie circulaire et de fonctions trigonométriques au programme de l'option mathématiques de première. Les définitions et propositions dans ces notes correspondent aux connaissances attendues et devant être maitrisées par les élèves. Les preuves des propositions ne sont pas écrites ; seules les démonstrations au programme, c'est à dire à savoir refaire par les lycéens, sont détaillées en annexe. Ces dernière contiennent également les représentations graphiques des fonctions étudiées ainsi qu'un complément sur les formules trigonométriques.

Maxime Baczyk

Table des matières

1 Trigonométrie circulaire élémentaire

Ce premier chapitre traite de la mesure naturelle des angles : le radian. Ceci permet de définir également le cosinus et le sinus pour un réel quelconque.

On considèrera un plan muni d'un repère orthonormé.

1.1 Mesures d'un angle

1.1.1 Le cercle trigonométrique

Voici, tout d'abord, la définition du cercle trigonométrique. On rappelle qu'un cercle peut être défini par la position de son centre et la valeur de son rayon. Le cercle trigonométrique possède également une convention pour son sens de parcours.

● **Définition 1.** [Cercle trigonométrique]

Soit un plan muni d'un repère orthonormé.
Le cercle centré en l'origine du repère, de rayon égal à l'unité et orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre est appelé cercle trigonométrique. Son sens de parcours est dit sens direct ou sens trigonométrique.

On en déduit facilement le périmètre, c'est à dire, la longueur du contour du cercle.

► **Proposition 1.** [Périmètre du cercle trigonométrique]

Soit un plan muni d'un repère orthonormé.
Alors le périmètre du cercle trigonométrique est égal à 2π.

1.1.2 Enroulement de la droite numérique

La notion fondamentale permettant de définir le radian mais aussi le cosinus et le sinus d'un réel est l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique. Cette application fait correspondre à chaque réel un point sur le cercle.

● **Définition 2.** [Enroulement de la droite numérique]

Soit un plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$ et soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique. On considère, de plus, une droite graduée placée perpendiculairement à l'axe des abscisses (OI) et passant par I. Cette droite numérique est orientée vers le haut et son zéro coïncide avec le point I.

On enroule alors la demi-droite numérique des réels positifs (c'est à dire, la demi droite au dessus de l'axe des abscisses) sur le cercle trigonométrique dans le sens direct et la demi-droite des réels négatifs (c'est à dire, en dessous de l'axe des abscisses) dans le sens indirect.

On fait correspondre de cette manière à chaque réel x de la droite graduée un point M sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

M est appelé point image du réel x. Ainsi, l'arc $\widehat{IM}$ est parcouru dans le sens direct avec une longueur x si x est positif et, est parcouru dans le sens indirect avec une longueur $-x$ si $x < 0$.

En notant $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique, on vient donc de définit une application telle que

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathcal{C} \\ x \mapsto M \end{array}}$$

où M est le point image issu de l'enroulement de la droite numérique et correspondant à la position x sur cette droite.

On peut maintenant donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux réels aient le même point image.

► **PROPOSITION 2.** [Caractérisation du point image]

Soient x et y deux réels.
Alors x et y ont le même point image sur le cercle trigonométrique si et seulement si $x - y$ est un multiple de 2π.

Cela revient, en fait, à faire des tours en plus ou en moins sur le cercle trigonométrique tout en retombant sur le même point.

Par exemple, $x+4\pi$ se retrouve à la même position que x sur le cercle trigonométrique puisque l'on a fait deux tour en plus. Idem, $x - 6\pi$ est à la même position que x avec trois tours dans le sens indirect en plus.

On en déduit de cette manière tous les réels ayant la même image sur le cercle trigonométrique.

► **PROPOSITION 3.** [Réels avec la même image sur le cercle trigonométrique]

Soit x un réel.
Alors tous les réels de la forme $x + 2k\pi$ où k est un entier relatif, c'est à dire, $k \in \mathbb{Z}$ ont la même image que x sur le cercle trigonométrique.

1.1.3 Mesures d'un angle en radians

La mesure d'un angle en radian correspond simplement à la longueur de l'arc associé sur le cercle trigonométrique ; c'est pourquoi le radian est l'unité naturelle de mesure des angles.

Par exemple, pour un point M du cercle trigonométrique, la mesure en radian de l'angle $\widehat{IOM}$ est la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$; elle est donc égale au réel x dont M est l'image par l'enroulement vu précédemment.

• **Définition 3.** [Mesure d'un angle en radians]

Soient un angle orienté au centre du cercle trigonométrique et θ un réel positif.
Une mesure de l'angle considéré est θ radians si l'angle est orienté dans le sens direct et qu'il intercepte sur le cercle trigonométrique un arc de longueur θ. Si l'angle est orienté dans le sens indirect et qu'il intercepte un arc de longueur θ sur le cercle trigonométrique alors une de ses mesures est $-\theta$.

Le radian est donc l'unité naturelle des angles. Par exemple, $\pi/2$ et $\pi/6$ correspondent respectivement à 90 degrés et 30 degrés.

Bien-sur, la radian et le degré sont des unités proportionnelles.

► **Proposition 4.** [Proportionnalité entre radians et degrés]

Les unités de radians et de degrés sont proportionnelles. Ainsi, on peut passer de l'une à l'autre par un tableau de proportionnalité et un produit en croix.

1.2 Cosinus et sinus d'un réel

1.2.1 Définitions

On s'attache maintenant à définir le cosinus et le sinus pour un réel quelconque.

• **Définition 4.** [Cosinus d'un réel]

Soient x un réel et M son point image sur le cercle trigonométrique. Le cosinus du réel x, noté $\cos(x)$, est défini comme l'abscisse du point M.

De même que le cosinus correspond à l'abscisse, le sinus est l'ordonnée.

● **DÉFINITION 5.** [Sinus d'un réel]

Soient x un réel et M son point image sur le cercle trigonométrique. Le sinus du réel x, noté $\sin(x)$, est défini comme l'ordonnée du point M.

Ainsi, le point M, image de x par l'enroulement de la droite numérique, a pour coordonnées :

$$\boxed{M(\cos(x);\sin(x))}$$

1.2.2 Formules de trigonométrie

Le cosinus et le sinus ont de nombreuses propriétés remarquables. On en donne quelques unes ici.

Tout d'abord, puisque ce sont les abscisse et ordonnée d'un point du cercle trigonométrique, ils sont nécessairement compris entre -1 et 1.

► **PROPOSITION 5.** [Bornes du cosinus et du sinus]

Soit x un réel.
On a

$$\boxed{\begin{array}{l} -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \end{array}}$$

Si l'on rajoute un tour, on retombe sur le même point image sur le cercle trigonométrique. Ce qui implique la propriété suivante :

► **PROPOSITION 6.** [2π-périodicité du cosinus et du sinus]

Soit x un réel.
On a

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(x+2\pi) = \cos(x) \\ \sin(x+2\pi) = \sin(x) \end{array}}$$

On en vient à une relation fondamentale en trigonométrie ; elle traduit, en effet, le théorème de PYTHAGORE.

♦ **THÉORÈME 1.** [Relation fondamentale de la trigonométrie]

Soit x un réel.
On a alors l'identité suivante

$$\boxed{\cos^2(x)+\sin^2(x)=1}$$

On peut également énoncer des formules plus complexes qui traduisent les symétries dans le cercle trigonométrique.

► **Proposition 7.** [Formules des angles associés]

Soit x un réel.
On a alors les relations qui suivent

$$\boxed{\cos(-x) = \cos(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x)}$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x)$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(x)$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x) \qquad \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x) \qquad \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$$

1.2.3 Lignes trigonométriques

Enfin, certaines valeurs des sinus et cosinus sont à connaitre par cœur. Ce sont des valeurs remarquables exactes qui correspondent aux angles de 0, 30, 45, 60 et 90 degrés. On peut ensuite retrouver les valeurs pour d'autres angles en utilisant les symétries du cercle trigonométrique.

♦ **Théorème 2.** [Lignes trigonométriques]

angle x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

1.2.4 Équations trigonométriques [hors programme]

Les équations trigonométriques constituent des problèmes classiques. Par exemple, on voudrait résoudre

$$\sin(x) = -\frac{1}{2}$$

Les propriétés qui suivent permettent de résoudre facilement ce type d'équations.

▷ **Proposition hors programme 1.** [Équations $\cos x = \cos x_0$]

Soit x_0 un réel. Soit l'équation $\cos(x) = \cos(x_0)$ d'inconnue x
Alors l'ensemble des solutions de cette équation sont les réels de la forme $x = x_0 + 2k\pi$ ou $x = -x_0 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$\triangleright$ **Proposition hors programme 2.** [Équations $\sin x = \sin x_0$]

Soit x_0 **un réel. Soit l'équation** $\sin(x) = \sin(x_0)$ **d'inconnue** x
Alors l'ensemble des solutions de cette équation sont les réels de la forme $x = x_0 + 2k\pi$ **ou** $x = \pi - x_0 + 2k\pi$ **avec** $k \in \mathbb{Z}$**.**

2 Fonctions trigonométriques

Puisque l'on a défini $\cos(x)$ et $\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il est intéressant d'étudier les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ que l'on appellera fonctions trigonométriques.

Celles-ci interviennent dans de nombreux domaines des sciences, notamment en physique pour modéliser les signaux périodiques et les ondes.

2.1 Définitions

2.1.1 Fonction cosinus et fonction sinus

On définit tout d'abord ces deux fonctions réelles.

● **Définition 6.** [Fonction cosinus]

La fonction cosinus, notée $\cos$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{\cos\,:\,x \mapsto \cos(x)}$$

● **Définition 7.** [Fonction sinus]

La fonction sinus, notée $\sin$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{\sin\,:\,x \mapsto \sin(x)}$$

2.1.2 Sinusoïdes

Les représentations graphiques de ces fonctions sont particulières, on les appelle des courbes sinusoïdales ou, plus simplement, des sinusoïdes.

● **Définition 8.** [Sinusoïde]

On appelle sinusoïdes ou courbes sinusoïdales les courbes représentatives des fonctions $\cos$ et $\sin$.

2.2 Premières propriétés

2.2.1 Propriétés des fonctions trigonométriques

On caractérise les deux fonctions trigonométriques définies ci-dessus.

► **Proposition 8.** [Parité/imparité des fonctions trigonométriques]

La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.

En effet, on a vu dans le chapitre précédent que $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.

▶ **Proposition 9.** [2π-périodicité des fonctions trigonométriques]

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques et de période égale à 2π.

2.2.2 Propriétés des sinusoïdes

On aborde quelques propriétés des courbes des fonctions cos et sin.

▶ **Proposition 10.** [Symétries dues à la parité/imparité]

La courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère tandis que celle de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Ceci est une simple conséquence de la parité de cos et de l'imparité de sin.

▶ **Proposition 11.** [Symétrie de périodicité]

Soient un repère orthonormé du plan (O, I, J) et $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$.
Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont invariantes par la translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.

2.3 Étude des fonctions trigonométriques

2.3.1 Dérivation

On peut étudier ces fonctions et notamment caractériser leur sens de variation. Ceci se fait, comme souvent, en étudiant le signe de la dérivée.

♦ **Théorème 3.** [Dérivation des fonctions trigonométriques]

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et admettent pour dérivées

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos'(x) = -\sin(x) \\ \sin'(x) = \cos(x) \end{array}}$$

On rencontre assez souvent et de manière plus générale des fonctions de la forme $\sin(ax + b)$ ou $\cos(ax + b)$. Voici la méthode de dérivation pour ce type de fonctions ; elle provient de la formule de dérivation des fonctions composées vue en terminale.

▶ **Proposition 12.** [Dérivation des fonctions trigonométriques (générales)]

Soient a et b deux réels.
Alors les fonctions de la forme $f(x) = \cos(ax + b)$ et $g(x) = \sin(ax + b)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et admettent pour dérivées

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x) = -a\sin(ax+b) \\ g'(x) = a\cos(ax+b) \end{array}}$$

2.3.2 Variations

On déduit des résultats ci-dessus le sens de variations des fonctions trigonométriques cosinus et sinus.

▶ **Proposition 13.** [Variations de cos sur $[-\pi;\pi]$]

Soit la fonction f définie sur le segment $[-\pi;\pi]$ par $f(x) = \cos(x)$.
Alors f est strictement croissante sur l'intervalle $[-\pi;0]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[0;\pi]$. Elle admet en particulier un maximum égal à 1 atteint en $x = 0$ et un minimum de -1 atteint en $x = -\pi$ et en $x = \pi$. Cette fonction s'annule pour $x = \pm\pi/2$.

▶ **Proposition 14.** [Variations de sin sur $[-\pi;\pi]$]

Soit la fonction g définie sur le segment $[-\pi;\pi]$ par $g(x) = \sin(x)$.
Alors g est strictement décroissante sur l'intervalle $[-\pi;-\pi/2]$, strictement croissante sur $[-\pi/2;\pi/2]$ et strictement décroissante sur $[\pi/2;\pi]$. Elle admet en particulier un maximum égal à 1 atteint en $x = \pi/2$ et un minimum de -1 atteint en $x = -\pi/2$. Cette fonction s'annule en $x = 0$ ainsi qu'en $x = \pm\pi$.

A Restitution organisée de connaissances

A.1 Démonstrations au programme

Démonstration de la proposition 4 :

Considérons deux réels x et x'. On se demande à quelle condition ces deux réels ont le même point image sur le cercle trigonométrique. Si le point image de x est M, il faut que celui de x' retombe sur M, c'est à dire, en réalisant exactement un ou plusieurs tours dans le sens direct ou indirect. Autrement dit, il faut et il suffit que x' soit égal à x ajouté à des multiples de 2π. D'où $x' = x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration de la proposition 5 :

Puisque le cosinus et le sinus sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée d'un point du cercle trigonométrique et que ce dernier, centré à l'origine, a pour rayon 1. Il est clair que $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont compris entre -1 et 1 pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration de théorème 1 :

Considérons un point M, image de $x \in \mathbb{R}$, sur le cercle trigonométrique et son projeté sur l'axe de abscisses H. Alors le triangle MOH est rectangle et, en appliquant l'identité de Pythagore, il vient

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = OM^2$$

et, comme le rayon est l'unité, $OM^2 = 1^2 = 1$.

Démonstration du théorème 2 :

Considérons un triangle équilatéral ABC de coté 1 et H le projeté orthogonal de A sur la base $[BC]$. La longueur AH se calcule grâce au théorème de Pythagore :

$$(\frac{1}{2})^2 + AH^2 = 1^2 = 1$$

Ce qui donne

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On utilise alors les formules de trigonométrie en triangle rectangle vues au collège. Dans le triangle rectangle ACH, le cosinus de $\widehat{ACH}$ est le rapport du coté adjacent sur l'hypoténuse et son sinus est le rapport du coté opposé sur l'hypoténuse. On obtient ainsi

$$\cos(\widehat{ACH}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

et

$$\sin(\widehat{ACH}) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

En considérant maintenant l'angle $\widehat{CAH}$, de mesure 30 degrés, on obtient de la même manière

$$\cos(\widehat{CAH}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et

$$\sin(\widehat{CAH}) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

Enfin, concernant l'angle de 45 degrés, on peut considérer un carré de coté 1. La longueur de sa diagonale s'obtient facilement par PYTHAGORE ; elle est égale à $\sqrt{2}$. On répétant le même raisonnement dans l'un des deux triangles formé par deux cotés du carré et la diagonale, on obtient

$$\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ce qui termine la démonstration des lignes trigonométriques.

Démonstration des propositions 8 et 9 :

Une fonction paire est définie sur un domaine symétrique par rapport à zéro et vérifie $f(-x) = f(x)$. Le cosinus étant défini sur $\mathbb{R}$ et, comme $\cos(-x) = \cos(x)$. C'est bien une fonction paire.
Une fonction impaire est définie sur un domaine symétrique par rapport à zéro et vérifie $f(-x) = -f(x)$. Le sinus étant défini sur $\mathbb{R}$ et, comme $\sin(-x) = -\sin(x)$. C'est donc une fonction impaire.

Soit $x \in \mathbb{R}$, puisque les réels $x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ont même point image que x sur le cercle trigonométrique, il est clair que

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$$

et

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$$

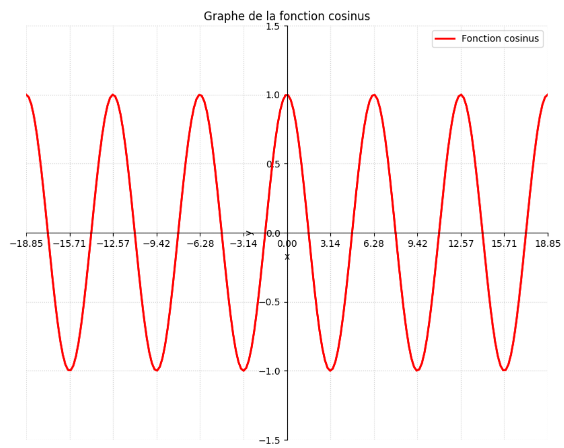
La plus petite période s'obtient avec $k = 1$. D'où la 2π-périodicité des fonctions cos et sin.

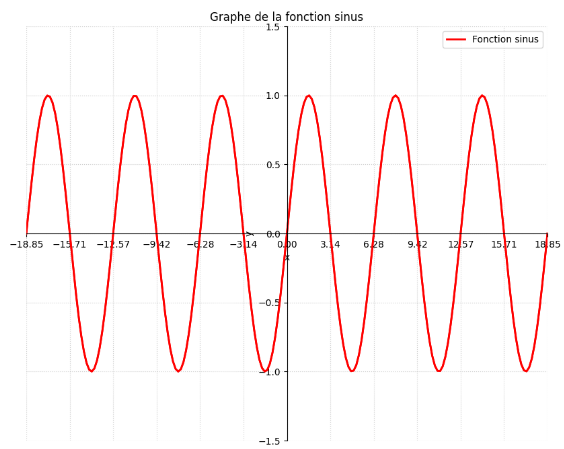
Démonstration de la proposition 12 :

On apprend en classe de première que la dérivée de $x \mapsto f(ax + b)$ est $x \mapsto a\,f'(ax + b)$. On applique ce résultat ici afin d'obtenir les formules de dérivation.

A.2 Représentations graphiques

Voici les représentations graphiques des fonctions trigonométrique cosinus et sinus.





A.3 Formules complémentaires

On donne ici quelques formules trigonométriques d'un niveau plus avancé.

▶ **Proposition 15.** [Formules d'addition]

Soient a et b deux réels.
On a

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\\ \cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\\ \sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)\\ \sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(b)\end{array}}$$

Combiné à la relation fondamentale de la trigonométrie, on peut en déduire les formules de duplication.

▶ **Proposition 16.** [Formules de duplication]

Soit a un réel.
On a

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos(2a)=1-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1\\ \sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)\end{array}}$$

La première identité de la proposition ci-dessus permet d'établir les formules de linéarisation.

▶ **Proposition 17.** [Formules de linéarisation]

Soit a un réel.
On a

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos^2(a)=\dfrac{\cos(2a)+1}{2}\\ \sin^2(a)=\dfrac{1-\cos(2a)}{2}\end{array}}$$

Il est également possible de définir les fonctions tangente et cotangente.

• **Définition 9.** [Fonction tangente]

La fonction tangente, notée $\tan$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ par

$$\boxed{\tan\,:\,x\mapsto\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}$$

● **Définition 10.** [Fonction cotangente]

La fonction cotangente, notée $\cot$**, est la fonction définie sur** $\mathbb{R}\backslash\{k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$ **par**

$$\boxed{\cot\,:\, x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}}$$

Il n'est pas difficile de voir que ces fonctions sont également périodiques, mais avec une période deux fois plus courte.

▶ **Proposition 18.** [π-périodicité de tangente et cotangente]

Les fonctions tangente et cotangente sont périodiques et de période égale à π**.**