Généralités sur les fonctions

Partie I :

Définitions & résolutions graphiques

Mathématiques générales en seconde

Je définis dans ce chapitre les notions de fonction réelle et de courbe représentative. Diverses fonctions, comme la fonction carré par exemple, sont introduites pour illustrer les définitions. J'aborde également les différents modes de génération des fonctions. La dernière section concerne la résolution graphique d'équations et d'inéquations à partir de courbes.

Maxime Baczyk

Table des matières

A Définitions

On commence par des définitions de base : on précise tout d'abord ce qu'est une fonction et comment est définie sa courbe représentative. On introduit également les notions d'image et d'antécédent par une fonction.

• **Définition 1.** [Fonction réelle]

Soit D un sous ensemble de $\mathbb{R}$ (c'est à dire, D est inclus dans $\mathbb{R}$ et on peut utiliser la notation $D \subset \mathbb{R}$).

On appelle fonction réelle sur D une relation qui associe à tout réel x appartenant à D un unique nombre réel noté $f(x)$. Cette fonction sera écrite de la façon suivante :

$$f : x \mapsto f(x)$$

La lettre x qui représente un nombre quelconque appartenant à D est dite la variable et, puisque D est inclus dans $\mathbb{R}$, on parlera plus précisément de fonction réelle d'une variable réelle.

On introduit, en tant que premiers exemples, les fonctions f et g définies sur $D = \mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto f(x) = x^2 \text{ et } g : x \mapsto g(x) = 2x + 1$$

Les formules $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x + 1$ permettent de définir entièrement les fonctions f et g ; on dit alors qu'elles sont définies par une relation algébrique. Les différents modes de définition des fonctions sont détaillés dans la suite.

On note que la fonction f transforme un réel en son carré et est appelée, pour cette raison, fonction carré.

La fonction g appartient, quant-à elle, à une classe bien connue de fonctions : les fonctions affines. Ces dernières sont également étudiées en détail en classe de seconde.

On donne les définitions d'image et d'antécédent d'un réel par une fonction :

• **Définition 2.** [Image et antécédent par une fonction]

Soient D un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle sur D. On considère un réel x appartenant à D.

Le réel $y = f(x)$ est dit image de x par f et le réel x est dit antécédent de $y = f(x)$ par f.

D'après les définitions précédentes, une fonction sur un ensemble D associe à chaque réel $x \in D$ une unique image $y = f(x)$. A partir de la relation algébrique qui définit la fonction, il n'est pas difficile de déterminer l'image d'un réel : il suffit de remplacer x par la valeur dont on souhaite calculer l'image dans l'expression de $f(x)$.

En revenant aux fonctions f et g introduites précédemment ($f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x + 1$), on peut calculer l'image de plusieurs réels par ces fonctions. Par exemple, s'il on prend la valeur $x = 0$, on obtient $f(0) = 0^2 = 0$ et $g(0) = 2 \times 0 + 1 = 1$; ainsi, l'image de 0 par f est égale à 0 et l'image de 0 par g est égale à 1. On peut déterminer de cette manière autant d'images que l'on le souhaite. Pour les réels 2 et 3 par exemple, les images par f sont donc $f(2) = 2^2 = 4$ et $f(3) = 3^2 = 9$ et celles par par g s'identifient à $g(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$ et $g(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$.

On insiste sur le fait qu'au contraire de l'image d'un réel qui est toujours unique, il peut exister plusieurs antécédents différents d'un réel donné par une fonction. Si l'on reprend l'exemple de la fonction carré, on a calculé $f(2) = 4$ et on peut donc dire que l'image de 2 par f est 4 et qu'un antécédent de 4 par f est 2. Le réel 4 a toutefois un autre antécédent : -2 est, en effet, également un antécédent de 4 par la fonction carré puisque $f(-2) = (-2)^2 = 4$.

D'une manière générale, pour un réel quelconque y, il peut exister un ou plusieurs antécédents de y, mais il peut également arriver qu'il n'existe aucun antécédent de y. Par exemple, toujours concernant la fonction carré, le réel -1 n'a pas d'antécédent puisque tout carré est positif (tous les $y < 0$ n'ont aucun antécédent par la fonction carré).

Rechercher tous les antécédents d'un réel k par une fonction f revient donc à déterminer les x appartenant à D tels que $f(x) = k$. En d'autres termes, il faut résoudre l'équation $f(x) = k$ dans l'ensemble D. En ré-utilisant l'exemple de la fonction carré, on doit résoudre l'équation $x^2 = k$; celle-ci admet deux solutions pour k strictement positif, une unique solution $x = 0$ si $k = 0$ et aucune solution dans le dernier cas $k < 0$. Concernant la fonction $g(x) = 2x + 1$, les antécédents de k sont les solutions de l'équation $2x+1=k$; ceci est une équation simple du premier degré et l'on peut facilement montrer que, quel que soit $k \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution c'est à dire un unique antécédent. En effet,

$$2x+1=k \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{k-1}{2}$$

La solution est donc toujours unique (cela est généralisable dans le sens où tout réel admet un unique antécédent par une fonction affine non constante).

En revenant à la définition 1, le sous ensemble de réels noté D sur lequel est définie la fonction s'appelle son ensemble de définition.

• **Définition 3.** [Ensemble de définition d'une fonction]

Soient D un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle sur D.

L'ensemble D est appelé ensemble de définition ou domaine de définition de la fonction f.

On note que si l'ensemble de définition D n'est pas précisé et que la fonction est uniquement définie par la relation algébrique donnant $f(x)$ à partir de x, on choisira D comme l'ensemble de tous les réels pour lesquels la formule a du sens. Pour les exemples $f(x)=x^2$ et $g(x)=2x+1$, ces expressions, appelées polynômes, sont bien définies pour tout réel x on l'on peut prendre $D=\mathbb{R}$ comme ensemble de définition.

Cependant, il est important de souligner que, pour d'autres expressions, certaines valeurs réelles de x peuvent conduire à un non sens. On introduit une troisième fonction pour illustrer cela :

$$h : x \mapsto h(x)=\frac{2}{x+1}$$

Puisqu'on ne peut diviser par zéro, l'image du réel -1 par h n'est pas définie (autrement dit, $h(-1)$ n'a pas de sens) et -1 ne peut donc appartenir à l'ensemble de définition de h. On dit alors que cette valeur est une valeur interdite.

Finalement, l'ensemble de définition d'une fonction s'identifie à $\mathbb{R}$ privé de l'ensemble de toutes les valeurs interdites.

Concernant la fonction h ci-dessus, son ensemble de définition est donc $D_h =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ (où on a noté $\setminus$ la différence ensembliste : $A\setminus B$ désigne l'ensemble des éléments de A privé de ceux de B).

Un autre exemple important de fonction est la fonction inverse définie par

$$l : x \mapsto l(x) = \frac{1}{x}$$

Comme il est interdit de diviser par zéro, $x = 0$ est une valeur interdite (et la seule) pour cette fonction. Son ensemble de définition s'identifie donc à $D_l =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{0\}$. D_l est l'ensemble de tous les réels sauf zéro, on le note $\mathbb{R}^*$.

$$\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Voici ci-dessous la définition de la courbe représentative ou graphe d'une fonction.

• **Définition 4.** [Courbe représentative d'une fonction]

Soient f une fonction réelle sur $D \subset \mathbb{R}$ et $R = (O; I; J)$ un repère orthonormé du plan.

La courbe représentative ou graphe de la fonction f, notée $\mathcal{C}_f$, est l'ensemble des points du plan ayant pour coordonnées $(x, f(x))$ avec $x \in D$ dans le repère R.

L'équation $y = f(x)$ est dite équation de la courbe $\mathcal{C}_f$.

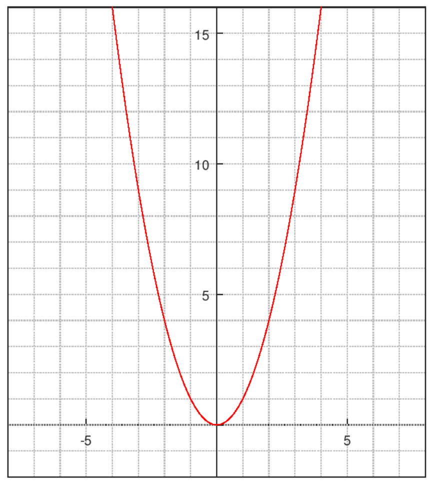
Ainsi, une courbe représentant une fonction ne peut pas contenir deux points différents de même abscisse ; cela impliquerait l'existence de plusieurs images pour un même réel $x \in D$. On note que la courbe peut néanmoins présenter des points différents de même ordonnée, ce qui signifie que l'ordonnée en question possède plusieurs antécédents par la fonction considérée.

Pour un point quelconque du plan M de coordonnées $(x; y)$, on a

$$M(x, ; y) \in \mathcal{C}_f \quad \text{si et seulement si} \quad y = f(x)$$

Autrement dit, les coordonnées de M doivent vérifier l'équation de la courbe.

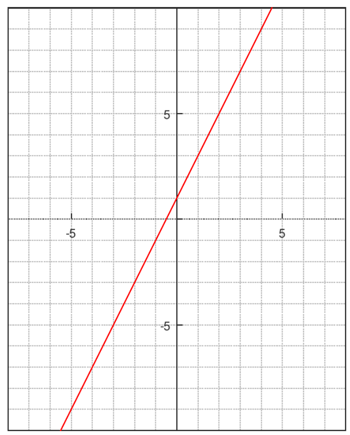
On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction carré $x \mapsto x^2$.



Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère et porte le nom de parabole. On dit qu'elle est tournée vers le haut et que l'origine du repère est son sommet : c'est la point le plus bas de la courbe.

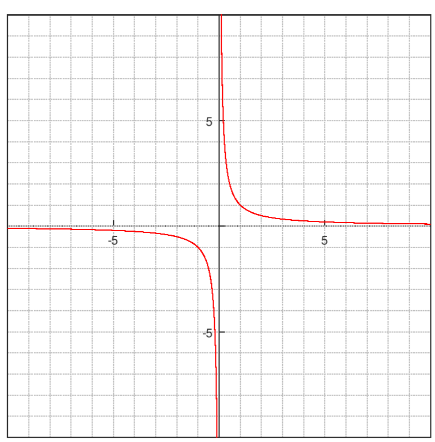
Plus généralement, les paraboles peuvent être tournées vers le haut ou vers le bas et ne sont pas forcément symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Les paraboles sont les courbes des fonctions polynômes du second degré qui sont caractérisées en classe de première.

On représente également le graphe de la fonction g introduite précédemment et définie par $x \mapsto g(x) = 2x + 1$:



On remarque que la courbe de g est une droite. Comme cela sera étudié dans un chapitre ultérieur, les fonctions de la forme $x \mapsto ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ (dites fonctions affines) sont, en effet, représentées par des droites.

On a aussi tracé la courbe de la fonction appelée fonction inverse et définie sur $\mathbb{R}^*$ par $l(x) = 1/x$:



Cette dernière courbe s'appelle une hyperbole. Elle est constituée de deux branches disjointes symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine du repère.

On souligne que la courbe de la fonction carré montre une symétrie axiale (par rapport à l'axe des ordonnées du repère) alors que celle de la fonction inverse présente une symétrie centrale (par rapport à l'origine du repère). Ceci est à relier avec ce que l'on appelle la parité ou l'imparité des fonctions, notion abordée dans la partie III du cours.

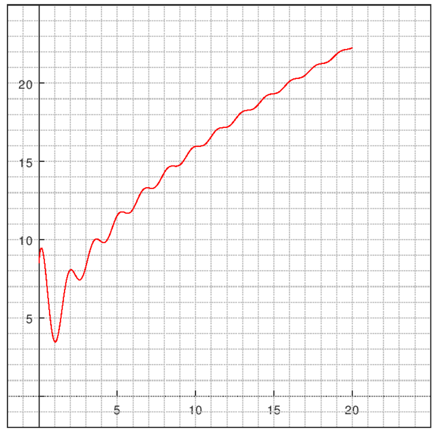
B Modes de génération des fonctions

Une fonction peut être définie par une relation algébrique, c'est à dire, par une formule donnant $f(x)$ à partir de x ou bien par une courbe, ou encore, par un tableau de valeurs qui précise les images $f(x)$ pour certaines valeurs réelles de x.

La définition d'une fonction par la relation algébrique (comme pour les fonctions f, g, h et l introduites dans la section A) permet une description complète de la fonction. Il est alors aisé de calculer les images pour différentes valeurs de x et, donc, d'en déduire un tableau de valeurs ainsi que la courbe $\mathcal{C}_f$. On note cependant qu'avec ce mode de définition, il peut être difficile de déterminer les antécédents puisque cela revient à résoudre des équations. Comme il a déjà été mentionné, déterminer les antécédents d'un réel k revient, en effet, à résoudre l'équation $f(x) = k$ dans le domaine D_f.

La définition d'une fonction par sa courbe permet, quant-à elle, une lecture facile des images et des antécédents. Pour un point appartenant à la courbe $\mathcal{C}_f$, on lit l'antécédent sur l'axe des abscisses et l'image sur l'axe des ordonnées du repère. On note que les valeurs lues sont en revanche souvent des valeurs approchées et que leur détermination est limitée par la précision du graphique.

Voici un exemple de fonction définie par une courbe :



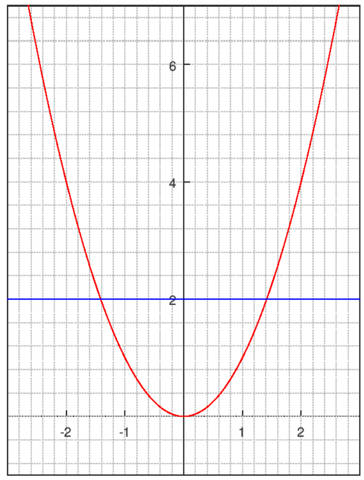
Finalement, le mode de génération qui consiste à introduire une fonction par un tableau de valeurs à deux colonnes (l'une pour x et l'autre pour $f(x)$) ne permet que de donner un nombre fini d'images. On ne peut alors pas en déduire de formule générale pour $f(x)$ (relation algébrique) et l'on ne peut placer qu'un nombre fini de point appartenant à la courbe sur le graphique. La courbe $\mathcal{C}_f$ est ensuite construite par interpolation.

C Résolutions graphiques

On commence par étudier les équations de la forme $f(x) = k$ où k est un réel quelconque : les solutions d'une telle équation sont donc tous les antécédents de k par la fonction f. Comme déjà précisé, il peut exister aucune solution, une unique ou encore plusieurs solutions. C'est le cas de la fonction carré où l'on trouve deux antécédents si $k > 0$, un seul pour $k = 0$ et aucun lorsque k est strictement négatif.

A partir de la courbe $\mathcal{C}_f$, la résolution graphique d'une équation de la forme $f(x) = k$ n'est pas compliquée : on trace alors la droite horizontale passant par l'ordonnée k sur le même graphique que la courbe $\mathcal{C}_f$ et les solutions s'identifient aux abscisses des points d'intersection entre la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite horizontale.

On présente comme exemple la résolution graphique de l'équation $x^2 = 2$ dans $\mathbb{R}$. Cette équation se ré-écrit $f(x) = 2$ où f est la fonction carré. On a tracé ci-dessous la parabole $\mathcal{C}_f$ ainsi que la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par l'ordonnée 2 :



On repère deux points d'intersection ayant approximativement pour coordonnées $(-1,4;2)$ et $(1,4;2)$ (la valeur de l'abscisse est approchée mais l'ordonnée 2 est exacte). Les solutions de l'équation $x^2 = 2$ sont donc les abscisses de ces points, c'est à dire, à peu près $x \simeq -1,4$ ou $x \simeq 1,4$.

Il est important de noter que l'équation précédente peut aussi être résolue par calcul :

$$x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$

Le réel $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel dont les premières décimales valent $\sqrt{2} \simeq 1,414\cdots$.

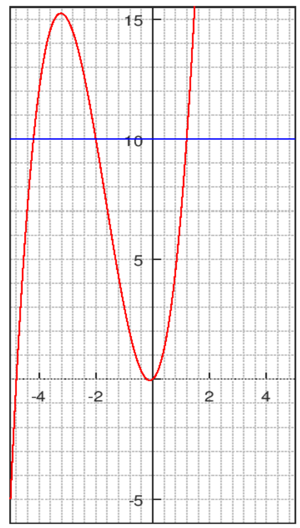
Un autre exemple plus élaboré est la résolution graphique de l'équation

$$x^3 + 5x^2 + x = 10$$

dans l'intervalle $[-5;5]$. Pour cela, on a représenté ci-dessous la courbe de la fonction

$$x \mapsto x^3 + 5x^2 + x$$

sur $[-5;5]$ et la droite horizontale passant par l'ordonnée 10.



Ainsi, il y a trois solutions à cette équation et celles-ci sont approximativement égales à $-4,2$, -2 et $1,2$.

Alors que $-4,2$ et $1,2$ sont des solutions approchées, on peut vérifier que -2 est une solution exacte de l'équation : on a, en effet, $(-2)^3+5(-2)^2+(-2)=10$ (en fait, cette équation peut être résolue exactement par calcul et on peut montrer que les solutions sont -2 et $(-3+\sqrt{29})/2 \simeq 1,2$ et $(-3-\sqrt{29})/2 \simeq -4,2$).

On étudie aussi des équations plus générales faisant intervenir deux fonctions ; on considère en effet des équations de la forme $f(x)=g(x)$ où f et g sont deux fonctions. D'après les définitions précédentes, les solutions de ce type d'équation sont donc les réels qui possèdent la même image par f et par g.

Pour résoudre graphiquement une équation de la forme $f(x) = g(x)$, il est nécessaire de représenter les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un même repère. Les solutions de l'équation sont alors simplement les abscisses associées aux points d'intersection entre les deux courbes.

Par exemple, on appelle p la fonction déjà introduite et définie sur $\mathbb{R}$ par

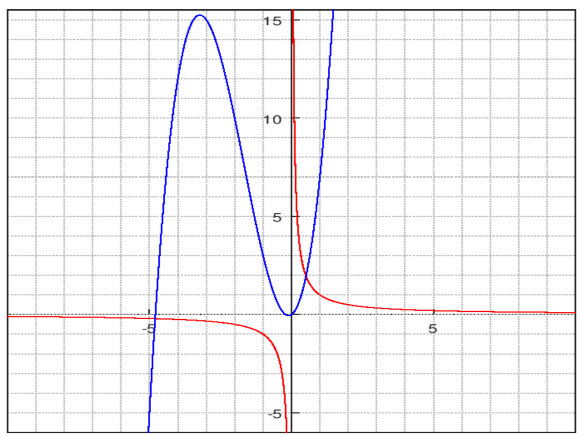
$$p : x \mapsto p(x) = x^3 + 5x^2 + x$$

Tout comme les expressions $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x+1$, $p(x)$ est un polynôme.

$p(x)$ est cependant un polynôme de degré 3 contrairement à x^2 et $2x+1$ qui sont respectivement de degré 2 et 1. Cela sera bien compris et précisé en classe de première.

On souhaite, par exemple, résoudre graphiquement l'équation $p(x) = l(x)$ dans $\mathbb{R}^*$; on rappelle que l est la fonction inverse définie par $l(x) = 1/x$.

On a tracé pour cela les courbes $\mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}_l$:



Les solutions de l'équation $x^3 + 5x^2 + x = 1/x$ sont donc au nombre de deux et approximativement égales à $-4,8$ et $0,5$.

On s'intéresse maintenant aux inéquations et, dans un premier temps, on considère une inéquation de la forme $f(x) \geqslant k$ avec $k \in \mathbb{R}$. La solution d'une telle inéquation est donc l'ensemble des réels x dont l'image est supérieure ou égale à k. On note que cette solution est, en général, un ensemble infini de réels comme un intervalle ou une union d'intervalle (il peut également exister aucune solution et, dans ce cas, l'ensemble de solutions $\mathcal{S}$ s'identifiera à l'ensemble vide que l'on note ϕ).

Concernant la résolution graphique de $f(x) \geqslant k$, comme pour l'équation, on trace la droite horizontale passant par l'ordonnée k dans un même repère que la courbe $\mathcal{C}_f$. Les solutions de l'inéquation sont toutes les abscisses pour lesquelles la courbe est au dessus de la droite horizontale.

A partir de la figure représentant la courbe de la fonction carré et la droite horizontale $y = 2$, on peut résoudre l'inéquation $x^2 \geqslant 2$ dans $\mathbb{R}$: on voit, en effet, que la parabole est au dessus de l'axe horizontal $y = 2$ pour les abscisses inférieures à $-\sqrt{2} \simeq -1,4$ ou supérieures à $\sqrt{2} \simeq 1,4$. La solution de l'inéquation est donc

$$\mathcal{S} =]-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$$

On termine cette partie avec des inéquations plus générales de la forme $f(x) \geqslant g(x)$: pour résoudre graphiquement ce type d'inéquations à partir des deux courbes superposées $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, il suffit de repérer l'ensemble de toutes les abscisses pour lesquelles la courbe de la fonction f et au dessus de celle de g.

Ainsi, en regardant la figure où l'on a tracé $\mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}_l$, il est possible de résoudre graphiquement l'inéqua-tion $p(x) \geqslant l(x)$ dans $\mathbb{R}^*$. On repère alors les abscisses pour lesquelles la courbe bleue est au dessus de la courbe rouge ; on trouve

$$\mathcal{S} = [-4,8; 0[\cup [0,5; +\infty[$$

Si l'on remplace l'inégalité large par une inégalité stricte et que l'on souhaite résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > g(x)$, il ne faut prendre en compte uniquement les abscisses des points où la courbe $\mathcal{C}_f$ est strictement au dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$; autrement dit, les points d'intersection des deux courbes ne doivent pas être pris comme solutions. Cela implique d'utiliser des bornes ouvertes et non fermées dans les intervalles solutions.

Concernant l'inéquation $p(x) > l(x)$ dans $\mathbb{R}^*$, on obtient donc

$$\mathcal{S} =]-4,8; 0[\cup]0,5; +\infty[$$

Enfin, si l'inégalité est dans l'autre sens, c'est à dire que l'on considère une équation $f(x) \leqslant g(x)$, la résolution graphique se fait de façon analogue en inversant le sens de la conclusion : il faut repérer les intervalles sur lesquels la courbe de la fonction g est au dessus de celle de f pour trouver la solution.

Par exemple, la solution de $p(x) \leqslant l(x)$ dans $\mathbb{R}^*$ s'identifie à

$$\mathcal{S} =]-\infty; -4,8] \cup]0; 0,5]$$