Généralités sur les fonctions

Partie II :

Sens de variation des fonctions

Mathématiques générales en seconde

Lorsqu'on étudie une fonction, il est naturel de se poser la question du sens de variation de celle-ci, c'est à dire, de savoir si le réel $f(x)$ augmente ou diminue quand la variable x augmente. Cela fait intervenir la notion de croissance d'une fonction que je présente dans ce chapitre. Toujours dans le but d'étudier des fonctions, on cherche souvent à déterminer le maximum ou le minimum de $f(x)$ lorsque x parcourt un intervalle de valeurs ; on parle de problème d'optimisation. Je définis ici les notions de croissance, décroissance ainsi que de maximum et minimum d'une fonction sur un intervalle. Je reprends les exemples introduits dans la partie I pour illustrer ces définitions.

Maxime Baczyk

Table des matières

A Sens de variation sur un intervalle

Intuitivement, si l'image $f(x)$ augmente lorsque le réel x augmente, on parle de fonction croissante. Graphiquement, une fonction est donc croissante si sa courbe représentative "monte" lorsqu'on se déplace vers les abscisses positives (de la gauche vers la droite).

On précise ici plus formellement la notion de fonction croissante sur un intervalle.

• **Définition 1.** [Fonction croissante sur un intervalle]

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle sur I.

La fonction f est croissante sur I si pour tous réels a et b appartenant à I, on a :

$$a \leqslant b \quad \textbf{implique} \quad f(a) \leqslant f(b)$$

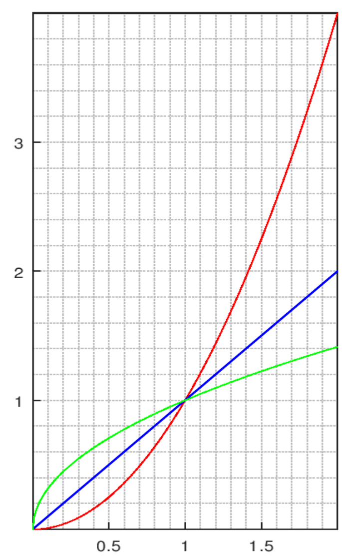
On dit donc qu'une fonction croissante conserve donc l'ordre.

Par exemple, la fonction affine $g(x) = 2x + 1$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et la fonction carré est également croissante sur $[0; +\infty[$ (c'est à dire pour les réels positifs).

Ces résultats, visibles sur les courbes des fonctions (voir la partie I), seront démontrés au cours du programme de seconde. Au passage, l'ensemble des réels positifs est noté $\mathbb{R}^+$:

$$\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$$

Voici les courbes de plusieurs fonctions croissantes sur $\mathbb{R}^+$:



Comme on peut le voir sur ces courbes, la croissance peut être plus ou moins rapide selon la fonction considérée (la fonction carré croit de plus en plus vite sur $\mathbb{R}^+$ alors que la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ croit de moins en moins vite ; ceci est lié à la convexité/concavité des fonctions qui est étudiée en classe de terminale).

On peut définir de manière similaire une fonction décroissante.

• **Définition 2.** [Fonction décroissante sur un intervalle]

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle sur I.

La fonction f est décroissante sur I si pour tous réels a et b appartenant à I, on a :

$$a \leqslant b \quad \textbf{implique} \quad f(a) \geqslant f(b)$$

Une fonction décroissante, au contraire, implique un renversement de l'ordre.

On note que la fonction inverse présentée dans la partie I (définie par $l(x) = 1/x$)

est décroissante sur $]-\infty;0[$ et également décroissante sur $]0;+\infty[$. Cependant, on ne peut pas dire qu'elle est décroissante sur $\mathbb{R}^*$ (on a, en effet, défini les notions de croissance et de décroissance pour une fonction sur un intervalle ; or, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle mais une union de deux intervalles $\mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[= \mathbb{R}^{*-} \cup \mathbb{R}^{*+}$).

Concernant les notations, on introduit aussi $\mathbb{R}^{*+}$ qui représente l'ensemble des réels strictement positifs.

$$\mathbb{R}^{*+} =]0;+\infty[$$

On parle aussi de fonction monotone :

• **Définition 3.** [Fonction monotone sur un intervalle]

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle sur I.

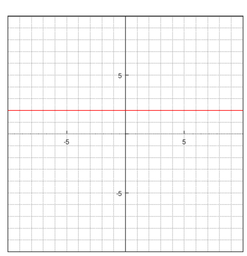
La fonction f est dite monotone sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.

Une fonction monotone ne change donc pas de sens de variation : elle est toujours croissante ou toujours décroissante.

La fonction g, comme toutes les fonctions représentées par des droites, est monotone. Au contraire, la fonction carré n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

On rencontre également des fonctions constantes comme, par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $c(x) = 2$ (plus généralement, les fonctions constantes sont de la forme $x \mapsto \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$). Ces dernières sont représentées graphiquement par des droites horizontales, c'est à dire, parallèles à l'axe des abscisses.

On présente ci-dessous le graphe de la fonction constante $x \mapsto 2$:



Déterminer le sens de variation d'une fonction revient à repérer les intervalles sur lesquels la fonction est croissante, décroissante ou encore constante. Ces informations sont résumées dans le tableau de variation de la fonction. Dans celui-ci, une ligne est consacrée à l'intervalle de définition de la fonction et une seconde ligne montre les variations sous formes de flèches vers le haut ou vers le bas.

On définit de plus la croissance stricte, où la fonction ne peut être constante sur un sous intervalle à la différence de la notion de croissance ci-dessus.

● **Définition 4.** [Fonction strictement croissante sur un intervalle]

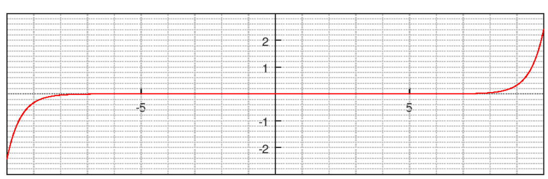
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle sur I.

La fonction f est strictement croissante sur I si pour tous réels a et b appartenant à I, on a :

$$a < b \quad \textbf{implique} \quad f(a) < f(b)$$

Cela revient à remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes dans la définition.

Toute fonction strictement croissante est une fonction croissante. Cependant, on peut rencontrer des fonctions croissantes qui ne le sont pas strictement. Pour visualiser la différence entre la croissance et la croissance stricte, on a représenté une fonction croissante mais pas strictement.



On peut dire que la notion de croissance englobe le cas constant au contraire de la notion de croissance stricte.

Voici la définition d'une fonction strictement décroissante :

• **Définition 5.** [Fonction strictement décroissante sur un intervalle]

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle sur I.

La fonction f est strictement décroissante sur I si pour tous réels a et b appartenant à I, on a :

$$a < b \quad \textbf{implique} \quad f(a) > f(b)$$

On parle aussi de fonction strictement monotone.

• **Définition 6.** [Fonction strictement monotone sur un intervalle]

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle sur I.

La fonction f est dite strictement monotone sur I si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

Les fonctions carré et inverse sont strictement monotones sur les intervalles où elles sont monotones (plus précisément, la fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ tandis que la fonction inverse est, quant-à elle, strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*-}$ et aussi strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$).

Au contraire, les fonctions constantes sont monotones mais pas strictement.

B Maximum et minimum

Le maximum d'une fonction sur un intervalle correspond à la plus grande valeur prise par la fonction, c'est à dire la plus grande image, sur l'intervalle considéré.

• **Définition 7.** [Maximum d'une fonction sur un intervalle]

Soient f une fonction réelle sur un ensemble D, I un intervalle inclus dans D et a un réel appartenant à I.

On dit que le réel $f(a)$ est le maximum de f sur I si pour tout x appartenant à I, on a $f(x) \leqslant f(a)$. On parle de maximum $f(a)$ atteint en $x = a$.

De même pour le minimum :

• **Définition 8.** [Minimum d'une fonction sur un intervalle]

Soient f une fonction réelle sur un ensemble D, I un intervalle inclus dans D et a un réel appartenant à I.

On dit que le réel $f(a)$ est le minimum de f sur I si pour tout x appartenant à I, on a $f(x) \geqslant f(a)$. On parle de minimum $f(a)$ atteint en $x = a$.

La fonction carré présente un minimum égal à zéro et atteint en zéro. Elle n'admet pas de maximum sur $\mathbb{R}$. La fonction g n'a, quant-à elle, ni maximum ni minimum sur $\mathbb{R}$.

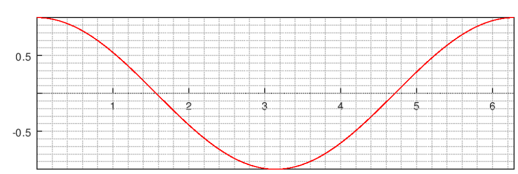
On utilise le terme extremum pour parler d'un maximum ou bien d'un minimum.

• **Définition 9.** [Extremum d'une fonction sur un intervalle]

Soient f une fonction réelle sur un ensemble D, I un intervalle inclus dans D et a un réel appartenant à I.

Le réel $f(a)$ est un extremum de f sur I si c'est un maximum ou un minimum.

Voici un exemple avec la courbe de la fonction cosinus qui sera étudiée en classe de première :



Cette fonction trigonométrique possède, sur $[0; 2\pi]$, un maximum atteint en $x = 0$ et $x = 2\pi$ et un minimum atteint en π.

La présence d'une extremum correspond donc à un changement de variation pour la fonction : elle passe de croissante à décroissante pour un maximum et de décroissante à croissante pour un minimum. Les valeurs pour lesquelles sont atteints les extrema sont indiquées dans la première ligne du tableau de variation de la fonction (on peut également écrire les valeurs des extrema au bout des flèches dans la seconde ligne montrant les variations).