Généralités sur les fonctions

Partie III :

Parité et imparité des fonctions

Mathématiques générales en seconde

Je présente dans ce chapitre deux cas bien particuliers de fonctions : les fonctions paires et les fonctions impaires. Je montrerai que leurs courbes représentatives présentent des symétries remarquables.

Maxime Baczyk

Table des matières

Afin de définir les fonctions dites paires ou impaires, on impose à l'ensemble de définition D d'être centré par rapport à zéro, ainsi qu'une relation bien particulière entre l'image d'un réel $x \in D$ et celle de son opposé $-x$.

Voici plus précisément ce qu'est un ensemble de réels centré en zéro :

• **Définition 1.** [Sous ensemble de réels centré en zéro]
Soit D un sous ensemble de réels.

D est dit centré en zéro si :

$$x \in D \quad \textbf{implique} \quad -x \in D$$

On étudie d'abord le cas des fonctions paires. Après les avoir définies, on démontre la propriété de symétrie du graphe par rapport à l'axe des ordonnées du repère. On s'attache ensuite au cas des fonctions impaires.

A Fonctions paires

Voici la définition d'une fonction paire :

• **Définition 2.** [Fonction paire]
Soit f une fonction réelle sur D où D est un ensemble de réels centré en zéro.

La fonction f est dite paire si pour tout x appartenant à D, on a $f(-x) = f(x)$.

Par exemple, la fonction carré et les fonctions constantes sont paires. En effet, concernant la fonction carré, on a $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ et, si c désigne une fonction constante ($x \mapsto \lambda$), on obtient également par définition $c(-x) = \lambda = c(x)$.

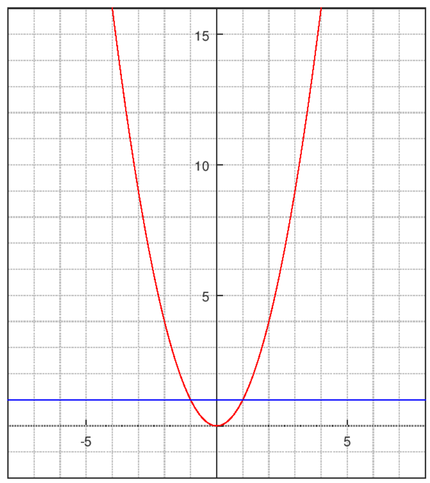
Il est possible de déduire de la définition 2 une symétrie générale de la courbe représentative d'une fonction paire :

▶ **Proposition 1** (Courbe représentative d'une fonction paire).
La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère.

Preuve : On suppose que f est une fonction paire. Pour démontrer que $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère, on commence par remarquer qu'une telle symétrie transforme un point $M(x;y)$ en un point $M'(-x,y)$. Il suffit donc de montrer que si $M(x;y)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ alors le symétrique $M'(-x;y)$ appartient aussi à $\mathcal{C}_f$. Or, si $M(x;y) \in \mathcal{C}_f$, on a $y = f(x)$ et le point de coordonnées $(-x; f(-x))$ appartient à $\mathcal{C}_f$ puisque le domaine est symétrique. Ce dernier point s'identifie à M' puisque $f(-x) = f(x) = y$.

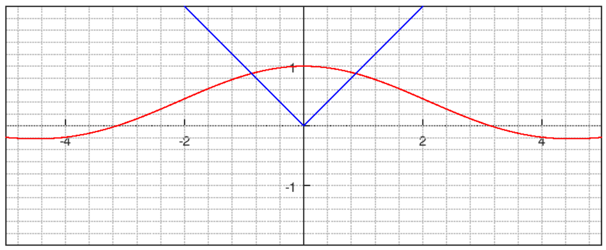
■

On présente ci-dessous les courbes de quelques fonctions paires :



Voici, ci-dessous, les courbes de deux autres fonctions usuelles paires : la fonction valeur absolue (elle est notée $x \mapsto |x|$ et définie par $|x| = x$ pour $x \geqslant 0$ et $|x| = -x$ pour x strictement négatif) et une fonction plus compliquée : la fonction sinus cardinal (par définition $\mathrm{sinc}(x) = \sin(x)/x$ où sin est la fonction sinus).

La fonction valeur absolue sera étudiée en détail en classe de première.



B Fonctions impaires

On introduit également les fonctions impaires :

• **Définition 3.** [Fonction impaire]

Soit f une fonction réelle sur D où D est un ensemble de réels centré en zéro.

La fonction f est dite impaire si pour tout x appartenant à D, on a $f(-x) = -f(x)$.

Comme pour les fonctions paires, le graphe des fonctions impaires présente une symétrie importante.

▶ **Proposition 2** (Courbe représentative d'une fonction impaire).
La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

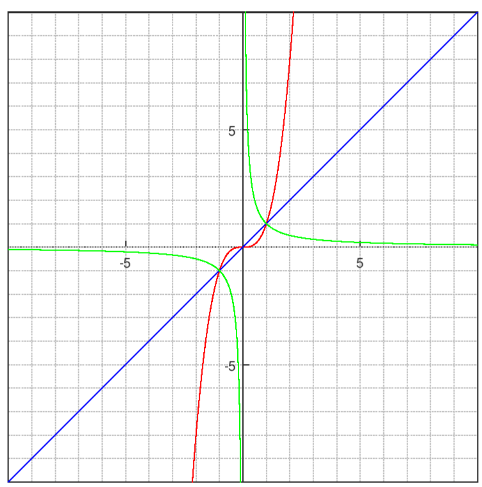
Preuve. On suppose f impaire et la démonstration est analogue à celle des fonctions paires. On remarque qu'une symétrie centrale par rapport à l'origine transforme un point $M(x; y)$ en un point $M'(-x, -y)$. Il suffit donc de montrer : $M(x; y) \in \mathcal{C}_f \quad \Rightarrow \quad M'(-x; -y) \in \mathcal{C}_f$. Si $M(x; y) \in \mathcal{C}_f$, on a $y = f(x)$ et le point de coordonnées $(-x; f(-x))$ appartient à $\mathcal{C}_f$ par symétrie du domaine. Ce dernier point s'identifie au point M' puisque $f(-x) = -f(x) = -y$.

■

Au contraire de la fonction carré, on peut voir facilement que les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^3$ (dites respectivement fonctions identité et cube) sont impaires sur $\mathbb{R}$ (parmi les fonctions puissances telles que $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}$, on retrouve les fonctions constante et carré pour $n = 0$ et $n = 2$ alors que les fonctions identité et cube s'identifient quant-à elles aux cas $n = 1$ et $n = 3$; les fonctions puissances sont paires si n est pair et impaires si n est impair). La fonction inverse $l(x) = 1/x$ est également impaire sur son ensemble de définition $\mathbb{R}^*$.

Alors que les courbes représentatives des fonctions paires exhibent une symétrie axiale (symétrie orthogonale), celles des fonctions impaires montrent une symétrie centrale.

On a tracé les courbes des fonctions impaires identité, cube et inverse :



On note qu'en général une fonction n'est ni paire ni impaire. De plus, les seules fonctions à être à la fois paires et impaires sont les fonctions nulles (de la forme $x \mapsto 0$) sur un domaine centré en zéro.

Lorsqu'une fonction est paire ou impaire, on peut limiter son étude à la moitié du domaine de définition : les réels positifs par exemple. Le comportement de la fonction sur l'autre moitié du domaine est alors déduit par symétrie.