Formulaire sur la transformée de Fourier

Pour écoles d'ingénieurs

On considère une fonction $f : t \mapsto f(t)$ définie et intégrable sur $\mathbb{R}$. On notera de façon équivalente $TF[f]$ ou $\hat{f}$ sa transformée de Fourier. On écrira aussi $TF^{\dagger}[\hat{f}]$ la transformée de Fourier inverse.

Concernant le produit de convolution, pour que ce dernier ait du sens, il est nécessaire que les fonctions satisfassent certaines hypothèses. On ne précise pas ces hypothèses ici.

Définitions :

★ **Transformée de Fourier**

$$\text{Si } f : t \mapsto f(t) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}$$

$$\text{alors on définit } \mathrm{TF}[f] = \hat{f} \,:\, \omega \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

★ **Transformée de Fourier inverse**

$$\text{Si } \hat{f} : \omega \mapsto \hat{f}(\omega) \text{ est une transformée de Fourier}$$

$$\text{alors on définit } \mathrm{TF}^{\dagger}[\hat{f}] \,:\, t \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{+i\omega t}\, d\omega$$

★ **Produit de convolution de deux fonctions**

$$\text{Si } f : t \mapsto f(t) \text{ et } g : t \mapsto g(t) \text{ sont deux fonctions sur } \mathbb{R}$$

$$\text{alors on définit } f * g \,:\, t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, g(t-s)\, ds$$

Propriétés :

$\Rightarrow$ *Théorème d'inversion*

$$\text{On a } \mathrm{TF}^{\dagger}[\mathrm{TF}[f]] = f \quad \text{et} \quad \mathrm{TF}[\mathrm{TF}^{\dagger}[\hat{f}]] = \hat{f}$$

$\Rightarrow$ *Linéarité*

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et f, g sont deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$

alors on a $\mathrm{TF}[\alpha f + \beta g] = \alpha\,\mathrm{TF}[f] + \beta\,\mathrm{TF}[g]$

$\Rightarrow$ *Conjugaison/symétrie hermitienne*

Si $\bar{z}$ dénote le conjugué du nombre complexe z

alors on a $\mathrm{TF}[\bar{f}](\omega) = \overline{\mathrm{TF}[f](-\omega)}$

$\Rightarrow$ *Cas des fonctions paires*

Si f est paire i.e. $f(-t) = f(t)$

alors on a $\mathrm{TF}[f] = 2\pi\,\mathrm{TF}^{\dagger}[f]$

$\Rightarrow$ *Cas des fonctions impaires*

Si f est impaire i.e. $f(-t) = -f(t)$

alors on a $\mathrm{TF}[f] = -2\pi\,\mathrm{TF}^{\dagger}[f]$

$\Rightarrow$ *Homothétie/dilatation temporelle*

Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $h : t \mapsto f(\mu t),\ \mu \in \mathbb{R}$

alors on a $\mathrm{TF}[h](\omega) = \dfrac{1}{|\mu|}\,\mathrm{TF}[f](\dfrac{\omega}{\mu})$

$\Rightarrow$ *Translation/décalage temporel*

$$\text{Si } f \text{ est intégrable sur } \mathbb{R} \text{ et } h : t \mapsto f(t-\tau),\ \tau \in \mathbb{R}$$

$$\text{alors on a } \mathrm{TF}[h](\omega) = e^{-i\omega\tau}\, \mathrm{TF}[f](\omega)$$

$\Rightarrow$ *Produit par une phase/décalage fréquentiel*

$$\text{Si } f \text{ est intégrable sur } \mathbb{R} \text{ et } h : t \mapsto e^{i\alpha t} f(t),\ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{alors on a } \mathrm{TF}[h](\omega) = \mathrm{TF}[f](\omega - \alpha)$$

$\Rightarrow$ *Théorème*

$$\text{Si } f, g \text{ sont deux fonctions intégrables sur } \mathbb{R}$$

$$\text{alors on a } \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, \mathrm{TF}[g](s)\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{TF}[f](s)\, g(s)\, ds$$

$\Rightarrow$ *Produit par une variable temporelle/dérivation fréquentielle*

$$\text{Si } f \text{ est intégrable sur } \mathbb{R} \text{ et } h : t \mapsto t\, f(t)$$

$$\text{alors on a } \mathrm{TF}[h](\omega) = i\, \mathrm{TF}[f]'(\omega)$$

$\Rightarrow$ *Produit par une puissance/dérivation multiple fréquentielle*

$$\text{Si } f \text{ est intégrable sur } \mathbb{R} \text{ et } h : t \mapsto t^n f(t),\ n \in \mathbb{N}$$

$$\text{alors on a } \mathrm{TF}[h](\omega) = i^n\, \mathrm{TF}[f]^{(n)}(\omega)$$

$\Rightarrow$ *Dérivée première/dérivation temporelle*

$$\text{On a } \mathrm{TF}[f'](\omega) = i\omega\, \mathrm{TF}[f](\omega)$$

⇒ *Dérivée nème/dérivation multiple temporelle*

$$\text{On a } \mathrm{TF}[f^{(n)}](\omega) = (i\omega)^n\, \mathrm{TF}[f](\omega)$$

⇒ *Primitive/intégration temporelle*

$$\text{Si } f \text{ est intégrable sur } \mathbb{R} \text{ et } h : t \mapsto \int_{-\infty}^{t} f(s)\, ds$$

$$\text{alors on a } \mathrm{TF}[h](\omega) = \frac{\mathrm{TF}[f](\omega)}{i\omega}$$

⇒ *Théorème de Plancherel*

$$\text{Si } f, g \text{ sont deux fonctions intégrables sur } \mathbb{R}$$

$$\text{alors on a } \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathrm{TF}[f](s)}\, \mathrm{TF}[g](s)\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(s)}\, g(s)\, ds$$

⇒ *Corollaire*

$$\text{Si } f \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}$$

$$\text{alors on a } \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{TF}[f](s)|^2\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(s)|^2\, ds$$

⇒ *Convolution/multiplication fréquentielle*

$$\text{Si } f, g \text{ sont deux fonctions intégrables sur } \mathbb{R}$$

$$\text{alors on a } \mathrm{TF}[f * g](\omega) = \mathrm{TF}[f](\omega)\, \mathrm{TF}[g](\omega)$$

⇒ *Produit/multiplication temporelle*

$$\text{Si } f, g \text{ sont deux fonctions intégrables sur } \mathbb{R}$$

$$\text{alors on a } \mathrm{TF}[fg] = \frac{1}{2\pi}\, \mathrm{TF}[f] * \mathrm{TF}[g]$$