Formulaire sur la transformée de Laplace

Pour écoles d'ingénieurs

On considère une fonction $f : t \mapsto f(t)$ définie $\mathbb{R}$. On suppose que f est à support positif (i.e. elle est nulle sur $\mathbb{R}^{*-}$) et localement intégrable (i.e. elle est intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$). On parlera de fonction objet pour f et on notera de façon équivalente $TL\,[f]$ ou F sa transformée de Laplace.

Définitions et premières propriétés :

★ **Transformée de Laplace**

$$\text{Si } f : t \mapsto f(t) \text{ est une fonction objet}$$

$$\begin{aligned}\text{alors on définit } \mathrm{TL}[f] : z \mapsto & \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-zt}\, dt \\ &= \lim_{R \to +\infty} \int_0^R f(t)\, e^{-zt}\, dt\end{aligned}$$

★ **Propriété de l'abscisse de convergence**

$$\text{Si } f : t \mapsto f(t) \text{ est une fonction objet}$$

$$\text{alors } \exists\, \alpha_f \in \tilde{\mathbb{R}},\ \mathrm{TF}[f] \text{ est définie et continue } \forall z \in \mathbb{C} \text{ avec } \Re(z) > \alpha_f$$

α_f est appelé abscisse de convergence.

★ **Limite quand $|z| \to +\infty$**

$$\text{Si } f : t \mapsto f(t) \text{ est une fonction objet}$$

$$\text{alors } \lim_{|z| \to +\infty} \mathrm{TL}[f](z) = 0$$

★ **Transformée de Laplace inverse**

$$\text{Si } F : z \mapsto F(z) \text{ est une transformée de Laplace}$$

$$\text{alors on définit } \mathrm{TL}^{\dagger}[F] \,:\, t \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{D}_b} F(z)\, e^{zt}\, dz$$

où $\mathcal{D}_b$ est une droite verticale du plan complexe choisie telle que l'intégrale ci-dessus soit convergente.

Propriétés :

⇒ *Théorème d'inversion*

$$\text{On a } \mathrm{TL}^{\dagger}[\mathrm{TL}[f]] = f \quad \text{et} \quad \mathrm{TL}[\mathrm{TL}^{\dagger}[F]] = F$$

⇒ *Linéarité*

$$\text{Si } \lambda, \mu \in \mathbb{C} \text{ et } f, g \text{ sont deux fonctions objets}$$

$$\text{alors on a } \mathrm{TL}[\lambda f + \mu g] = \lambda\,\mathrm{TL}[f] + \mu\,\mathrm{TL}[g]$$

⇒ *Transformée de la dérivée*

$$\text{Si } f \text{ est une fonction objet}$$

$$\text{alors on a } \mathrm{TL}[f'](z) = z\,\mathrm{TL}[f](z) - \lim_{t\to 0^+} f(t)$$

⇒ *Transformée de la dérivée seconde*

$$\text{Si } f \text{ est une fonction objet}$$

$$\text{alors on a } \mathrm{TL}[f''](z) = z^2\,\mathrm{TL}[f](z) - z \lim_{t\to 0^+} f(t) - \lim_{t\to 0^+} f'(t)$$

⇒ *Transformée du produit par une fonction puissance*

$$\text{Si } f \text{ est une fonction objet et } h : t \mapsto t^n\, f(t)$$

$$\text{alors on a } \mathrm{TL}[h] = (-1)^n \mathrm{TL}[f]^{(n)}$$

⇒ *Transformée de la primitive*

$$\text{Si } f \text{ est une fonction objet et } h : t \mapsto \int_0^t f(s)\,ds$$

$$\text{alors on a } \mathrm{TL}[h](z) = \frac{1}{z}\,\mathrm{TL}[f](z)$$

⇒ *Propriété de modulation*

$$\text{Si } f \text{ est une fonction objet et } h : t \mapsto e^{-at} f(t),\ a \in \mathbb{C}$$

$$\text{alors on a } \mathrm{TL}[h](z) = \mathrm{TL}[f](z+a)$$

⇒ *Propriété de translation*

$$\text{Si } f \text{ est une fonction objet et } h : t \mapsto f(t-\tau),\ \tau \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{alors on a } \mathrm{TL}[h](z) = e^{-\tau z}\, \mathrm{TL}[f](z)$$

⇒ *Propriété de dilatation*

$$\text{Si } f \text{ est une fonction objet et } h : t \mapsto f(\beta t),\ \beta \in \mathbb{R}^{*+}$$

$$\text{alors on a } \mathrm{TL}[h](z) = \frac{1}{\beta}\, \mathrm{TL}[f](\frac{z}{\beta})$$

⇒ *Transformée de la conjuguée*

$$\text{Si } \bar{z} \text{ dénote le conjugué du nombre complexe } z$$

$$\text{alors on a } \mathrm{TL}[\bar{f}](z) = \overline{\mathrm{TL}[f](\bar{z})}$$

⇒ *Transformée du produit de convolution*

$$\text{Si } f, g \text{ sont deux fonctions objets}$$

$$\text{alors on a } \mathrm{TL}[f * g] = \mathrm{TL}[f]\, \mathrm{TL}[g]$$

⇒ *Transformée de la dérivée nème*

$$\text{Si } f \text{ est une fonction objet}$$

$$\text{alors on a } \mathrm{TL}[f^{(n)}](z) = z^n\, \mathrm{TL}[f](z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} \lim_{0^+} f^{(k)}$$