Suites arithmétiques

⋆ **Exercice 1**

Soit la suite (U_n) définie par $U_{n+1} = \sqrt{1 + U_n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et avec $U_0 = 0$. Soit la suite (V_n) telle que $V_n = U_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que (V_n) est une suite arithmétique et préciser sa raison.
2. En déduire V_n en fonction de n.
3. En déduire U_n en fonction de n.

⋆ **Exercice 2** *Problème*

Un employé débute dans une entreprise avec un salaire mensuel de 1900 euros. Son contrat prévoit une augmentation mensuelle de 9 euros à partir de second mois. On note $s_0 = 1900$ son salaire d'embauche et s_n sont salaire à la fin du $(n+1)$-ième mois pour $n \geqslant 1$.

1. Exprimer s_{n+1} en fonction de s_n.
2. En déduire la nature de la suite (s_n).
3. En déduire l'expression de s_n en fonction de n.
4. Déterminer le rang du premier mois où le salaire dépassera 2500 euros.
5. Quelle sera, à cette date, la somme totale perçue par l'employé depuis son embauche ?

⋆ **Exercice 3**

Soit (U_n) une suite arithmétique telle que $U_6 = -19$ et $U_{32} = 72$.

1. Déterminer la raison r et le premier terme U_0 de cette suite.
2. Calculer la somme $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_{10}$.

⋆ **Exercice 4** *Vrai ou faux ?*

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. On ne demande pas de justification si vous répondez "Vrai" mais, par contre, en cas de réponse "Faux", un contre-exemple ou une démonstration sont exigés.

1. Une suite constante est arithmétique.
2. Si (a_n) est arithmétique alors les points de coordonnées $(n; a_n)$ sont alignés sur une droite dont le coefficient directeur est a_0.
3. La suite définie par $U_n = (1-n)/3$ pour $n \in \mathbb{N}$ est arithmétique.
4. La somme des quinze premiers entiers naturels non nuls est 240.
5. La somme de deux suites arithmétiques est une suite arithmétique.
6. Le produit de deux suites arithmétiques est une suite arithmétique.

⋆ **Exercice 5** *Somme de Gauss/Démonstration*

Démontrer le résultat suivant :

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$