Suites géométriques

⋆ **Exercice 1** *Problème 1*

Une retenue d'eau artificielle est alimentée par un ruisseau dont le débit diminue de 12 pour-cents d'un jour sur l'autre en raison de la chaleur. Au 1er juin 2019, le débit D_0 était égal à 250 m^3 par jour. On note D_n le débit du ruisseau pour le n-ième jour après le 1er juin 2019.

1. Calculer D_1, le débit au 2 juin 2019.
2. Exprimer D_{n+1} en fonction de D_n.
3. En déduire la nature de la suite (D_n).
4. En déduire l'expression de D_n en fonction de n.
5. Calculer le volume d'eau total apporté par le ruisseau dans la retenue au cours des 30 jours du mois de juin.

⋆ **Exercice 2** *Problème 2*

En traversant une plaque de verre teintée, un rayon lumineux perd 18 pour-cents de son intensité lumineuse. On superpose alors n plaques de verre identiques et l'on note i_n l'intensité du rayon à la sortie de la $n$ème plaque exprimée en candela. i_0 est l'intensité initiale du rayon, c'est à dire avant son entrée dans la première plaque de verre, et i_1 est l'intensité à la sortie de cette première plaque.

1. Exprimer i_1 en fonction de i_0.
2. Donner la nature de la suite (i_n) en justifiant.
3. Exprimer i_n en fonction de n et i_0.
4. Déterminer l'intensité initiale d'un rayon dont l'intensité après avoir traversé 6 plaques teintées est égale à 8 candelas. On arrondira le résultat à 0,01 près.

⋆ **Exercice 3** *Problème 3*

Une substance radioactive perd $7,5$ pour-cents de sa masse chaque année. La masse initiale de la substance radioactive est notée M_0. Soit la suite (M_n) telle que M_n est la masse de la substance au bout de n années avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner la nature de la suite (M_n) en justifiant.
2. Exprimer M_n en fonction de n et M_0.
3. Déterminer le nombre d'années nécessaires pour que la masse radioactive ait diminué de moitié.

⋆ **Exercice 4**

Soit (V_n) une suite géométrique telle que $V_5 = 135$ et $V_8 = 3645$.

1. Déterminer la raison q et le premier terme V_0 de cette suite sous la forme d'une fraction irréductible.
2. Calculer la somme $S = V_0 + V_1 + \cdots + V_8$ et écrire le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

⋆ **Exercice 5** *Vrai ou faux ?*

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. On ne demande pas de justification si vous répondez "Vrai" mais, par contre, en cas de réponse "Faux", un contre-exemple ou une démonstration sont exigés.

1. Une suite constante est géométrique.
2. Pour montrer qu'une suite est géométrique, il suffit de prouver qu'elle n'est pas arithmétique.
3. La suite (U_n) définie par $U_n = -3n$ est géométrique.
4. La suite (V_n) définie par $V_n = (-3)^n$ est géométrique.
5. La suite (W_n) définie par $W_n = -3^n$ est géométrique.
6. La somme des puissances de 2, de 2^0 à 2^{11}, est égale à $2^{12} - 1$.
7. La somme de deux suites géométriques est une suite géométrique.
8. Le produit de deux suites géométriques est une suite géométrique.

⋆ **Exercice 6**

Les suites ci-dessous sont-elles géométriques ? Si oui, donner la raison et le premier terme de la suite.

1. (α_n) telle que $\alpha_n = 7^{3n+1}/6^{1-2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. (β_n) telle que $\beta_n = 4\,n^3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. (γ_n) telle que $\gamma_{n+1} - \gamma_n = (2/3)\gamma_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. (δ_n) telle que $\delta_n = (-1/4)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

⋆ **Exercice 7** *Somme géométrique/Démonstration*

Démontrer le résultat suivant : Pour tout entier naturel n et pour tout réel $q \neq 1$, on a

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$