

1. INTRODUCTION AUX PHÉNOMÈNES CRITIQUES
ET
AU MODÈLE D'ISING

En prenant comme point de départ la définition et un bref historique de la physique statistique, j'en présente un sous domaine qui est la théorie des transitions de phases, tout en insistant sur les motivations de ces études. Les transitions de phases sont assez intuitives puisqu'elles peuvent concerner les changements d'états de la matière comme l'ébullition de l'eau par exemple. J'en profite pour introduire le modèle d'Ising qui est le principal modèle issu de ce champ d'étude et qui permet de décrire de telles transitions. Je définis enfin plus précisément ce qu'est un phénomène critique et j'évoque les grandes propriétés qui lui sont associées ainsi que la technique mathématique utilisée pour traiter ce genre de problème.

Maxime Baczyk, 2023

Le modèle d'ISING est un modèle fondamental de physique statistique permettant de décrire et de comprendre les transitions de phases dans les systèmes macroscopiques, c'est à dire, dans les systèmes présentant un très grand nombre de constituants.^A

La physique statistique est, en effet, le champ d'étude de la physique visant à expliquer le comportement et l'évolution de tels systèmes à partir d'une description microscopique au niveau des constituants élémentaires à l'aide de méthodes probabilistes. Le système macroscopique en question peut aussi bien concerner la matière que le rayonnement ; dans le premier cas, ses constituants sont des atomes, des molécules, des ions ou encore des particules élémentaires comme des électrons ou des quarks. Il est aussi possible de considérer un système de photons, entre autres, afin d'étudier le rayonnement. Les constituants microscopiques et leurs interactions peuvent être décrits par la mécanique quantique ou bien par la mécanique classique.^B Dans ce dernier cas, on utilise les équations de la mécanique newtonienne ou relativiste.

La physique statistique a pris son essor dans la seconde moitié du XIXe siècle sous l'impulsion des travaux de MAXWELL et de BOLTZMANN notamment. La mécanique statistique a ensuite été formalisée par GIBBS au tout début du XXe siècle ; ceci a rendu possible la dérivation et la justification des principes de la thermodynamique à l'équilibre traditionnelle développée auparavant.

^ALes systèmes macroscopiques sont constitués d'un nombre de corps de l'ordre du nombre d'AVOGADRO, soit de l'ordre de cent mille milliards de milliards. En effet, le nombre d'AVOGADRO $\mathcal{N}_A \simeq 6,02 \times 10^{23}$ est égal au nombre d'entités (atomes, molécules ou ions) présentes dans une môle de matière ; ceci est la définition même de la môle en chimie.

^BOn emploie le terme "classique" par opposition à "quantique" ; une théorie classique est donc une théorie non quantique.

Au cours du siècle précédent, la physique statistique a été développée en parallèle de la physique quantique. La première venant en complément de la seconde afin d'accéder aux propriétés physiques des systèmes de grandes tailles.

En outre, une extension remarquable de la mécanique statistique a été la théorie des transitions de phases et le modèle d'ISING a énormément contribué au succès de cette dernière.

Pour un système présentant un nombre macroscopique de degrés de liberté^C en interaction, une transition de phases correspond à un changement abrupt de l'état du système sous la variation continue d'un paramètre extérieur. Physiquement, ce paramètre peut s'identifier à la température ou à un champ magnétique par exemple. Une transition de phases ordinaire est donc l'ébullition de l'eau : lorsque la température atteint 100 degrés Celsius à la pression atmosphérique, l'eau passe subitement de l'état liquide à l'état gazeux. Ainsi, la théorie des transitions de phases concerne les changements d'états de la matière.^D Elle peut aussi décrire et expliquer des phénomènes magnétiques dans les métaux qui deviennent ferromagnétiques à basse température, ou encore, les céramiques pouvant passer à un état supraconducteur^E en dessous d'une température critique très faible. Bien que la transition supraconductrice s'explique par un comportement quantique de la matière, d'autres transitions peuvent être comprises à partir de la mécanique classique.^F

Ces changements d'états macroscopiques sont fréquents en physique et peuvent aussi être transposés à d'autres domaines des sciences.

Les comportements collectifs que sont les transitions de phases s'accompagnent toujours d'une brisure spontanée de symétrie : l'une des deux phases est plus ordonnée et présente moins de symétries que l'autre. On appelle traditionnellement cette dernière la phase basse température ; en diminuant la température afin d'y accéder, des symétries du système disparaissent spontanément.

Sur le plan cosmologique, il existe aussi des transitions de phases fondamentales ayant eu lieu au tout début de la naissance de l'univers. Celles-ci se sont accompagnées d'une disparition des symétries des lois de la physique et cela a donné naissance à plusieurs interactions différentes comme l'électromagnétisme ainsi que les interactions quantiques faible et forte.

^COn parle de degrés de liberté pour les variables du système nécessaires à sa description complète.

^DOn appelle, par exemple, fusion le passage d'un corps solide à liquide, vaporisation la transformation d'un liquide en gaz ou encore ionisation celle d'un gaz en plasma.

^EUn supraconducteur est caractérisé par une résistance électrique identiquement nulle. Ces conducteurs peuvent donc transporter de l'électricité sans aucune perte énergétique.

^FUne autre transition d'origine quantique est le passage d'un fluide vers l'état superfluide dans lequel il perd toute viscosité ; on parle de condensat de BOSE-EINSTEIN.

En conséquent, les transitions de phases interviennent dans nombre de domaines de la physique contemporaine allant de la cosmologie à la physique des particules, en passant bien évidemment par la physique du solide. Dans un souci de compréhension de ces phénomènes courants, les physiciens s'y sont intéressés depuis fort longtemps et, actuellement, ces recherches constituent encore une activité intense.

Le modèle d'ISING a été le premier modèle permettant de comprendre une transition de phases. C'est aussi le modèle le plus simple pour étudier ces phénomènes collectifs. De part cette simplicité et ses nombreuses applications, il est certainement l'un des modèles les plus célèbres de la physique statistique et a été le sujet d'une quantité très importante d'articles de recherche.

Le modèle d'ISING est apparu dans les années 1920 grâce aux recherches de LENZ et de son doctorant ISING. Lors de sa thèse, ce dernier a montré que le modèle ne prédisait pas de transition de phases pour un espace unidimensionnel tel une chaîne ou un anneau. Cependant, le modèle d'ISING présente bel et bien une transition de phases lorsque la dimension de l'espace est supérieure ou égale à 2 ; cela a été montré par PEIERLS à l'aide d'un argument datant de 1936. Dès lors, des développements et des approches théoriques ont notamment permis de calculer la température critique au point de transition. La solution exacte du modèle bidimensionnel a ensuite été obtenue par ONSAGER en 1944. Cette solution pour le modèle d'ISING en dimension 2 est un grand succès de la mécanique statistique : elle permet donc de décrire des comportements collectifs complexes comme les transitions de phases.

On s'intéresse à une classe particulière de transitions appelées transitions continues ou phénomènes critiques. On parle, en effet, de physique critique lorsque la longueur de corrélation^G du système diverge au point de transition qui sépare les deux phases. Cette divergence entraîne des propriétés remarquables comme l'invariance d'échelle ou comportement fractal du système ainsi que l'universalité.

La perte de l'échelle caractéristique représentée par la longueur de corrélation au point critique implique l'invariance d'échelle : le système présente des fluctuations et des amas à toutes les échelles au point critique. A l'aide des méthodes évoquées dans la suite, on peut démontrer que l'invariance d'échelle conduit à des comportements des grandeurs thermodynamiques en lois de puissance à l'approche du point de transition et que ceux-ci ne dépendent pas des détails microscopiques ; ces comportements sont universels. Les lois sont effectivement les mêmes pour toute une classe de transitions de phases. Par exemple, les grandeurs associées à la transition liquide-gaz dans les fluides vérifient exactement les mêmes lois que celles caractérisant la transition ferromagnétique dans

^GOn peut voir la longueur de corrélation du système comme la taille moyenne des amas de corps en interaction. C'est aussi la longueur caractéristique sur laquelle les degrés de liberté varient significativement.

les métaux.^H

La présence d'un nombre macroscopique de degrés de liberté en interaction, caractérisant les phénomènes critiques, implique une grande complexité technique et mathématique pour étudier de tels systèmes. Bien qu'il n'existe toujours pas de solution exacte au modèle d'ISING tridimensionnel, la physique statistique a surpassé le problème en s'enrichissant dans les années 60 et 70 d'une nouvelle méthode introduite par KADANOFF puis formalisée et généralisée par WILSON où les fluctuations des degrés de liberté sont intégrées étape par étape. Cela marque la naissance du groupe de renormalisation. A partir de ce moment, la compréhension des phénomènes critiques s'est largement accrue. En combinant notamment à la démarche du groupe de renormalisation des développements issus de la théorie de perturbation, il a été possible de calculer très précisément les propriétés physiques et thermodynamiques du modèle d'ISING en dimension 3.^I

Dans les années 80 et 90, des approches non perturbatives du groupe de renormalisation ont été développées. Celles-ci sont basées sur des équations de renormalisation exactes et ne font pas intervenir de développement en série selon les puissances des constantes de couplages.^J Bien qu'on ne puisse toujours pas obtenir de solution exacte dans la plupart des cas, ces méthodes permettent de caractériser la transition de phases du modèle d'ISING avec une excellente précision.

Il est aussi facilement possible de simuler le modèle sur ordinateur afin de calculer les quantités thermodynamiques du système et de vérifier les résultats obtenus théoriquement.

Il serait cependant erroné de croire que le débat autour des transitions continues est clos et, actuellement, beaucoup de systèmes font toujours l'objet de recherche. Il existe effectivement des transitions aux propriétés encore indéterminées : par exemple, celles avec un schéma de brisure de symétrie complexe ou bien en présence d'interactions à longue portée. Ceci concerne également les systèmes frustrés et les systèmes désordonnés comportant des impuretés, des in-homogénéités etc. Ces derniers présentent une physique riche et, parfois, encore incomprise. Pour étudier ces transitions, les physiciens les modélisent à partir de généralisations du modèle d'ISING, d'où l'importance fondamentale de

^HLes lois de puissance universelles sont caractérisées par des exposants appelés exposants critiques et les transitions présentant les mêmes exposants appartiennent à la même classe d'universalité. Les classes d'universalités ne dépendent que de paramètres très généraux comme la dimension de l'espace physique ou bien le schéma de brisure de symétrie.

^IPar exemple, dans le développement très connu de WILSON et FISHER exposé au début des années 70, les observables sont développées de manière systématique autour de la théorie libre selon les puissances de $\epsilon = 4 - d$ où d désigne la dimension de l'espace. Cela a permis de déterminer les propriétés physiques du système sous la forme d'un développement en série.

^JOn entend par constantes de couplage les paramètres traduisant l'intensité des différentes interactions microscopiques du modèle.

celui-ci.