2. Spins d'Ising et configurations du système

J'introduis la variable d'Ising qui s'identifie simplement à une variable numérique à deux états : $+1$ ou -1. On l'appellera spin. Le système va lui-même être constitué par une quantité importante de ces variables que l'on peut se représenter comme chacune disposée à un nœud d'un réseau. Par exemple, considérons un quadrillage dans le plan ; il y aurait un spin à chaque intersection entre les droites perpendiculaires du quadrillage. Voilà un exemple de système d'Ising sur réseau carré. Je discute aussi les configurations du système : elle traduisent l'état microscopique complet du système et correspondent donc à la donnée des valeurs de tous les spins. Bien-sur, les spins ne sont pas indépendants entre eux et présentent aussi un comportement aléatoire mais cela sera abordé dans des notes ultérieures.

Maxime Baczyk, 2023

Dans le modèle d'Ising, les variables internes du système, que l'on appelle ses degrés de liberté, sont des variables binaires : elles ne prennent que deux valeurs. Par commodité, on choisit ces deux valeurs possibles comme $+1$ et -1.[A] Ainsi, si on note S une telle variable, alors

$$S = \pm 1 \tag{1}$$

On parle de spin d'Ising pour le degré de liberté S du système. On dit *"spin up"* pour la valeur $+1$ et *"spin down"* pour la valeur -1. Historiquement, le spin d'Ising modélise le spin de l'électron[B] qui se situe sur la couche externe de l'atome.

D'un point de vue historique et physique, on souhaite décrire un ensemble très grand d'atomes régulièrement répartis dans l'espace et possédant chacun un spin qui interagit avec ses voisins. On considère donc un système constitué de N spins d'Ising disposés aux nœuds d'un réseau dans l'espace.

Le comportement du système va dépendre du choix du réseau ; par exemple, on peut étudier les spins d'Ising tous alignés le long d'un segment[C] ou bien les considérer sur un cercle.[D] Dans ces deux cas, les spins sont donc répartis dans

[A] On se base sur la symétrie par rapport à zéro : au lieu de prendre comme valeurs 0 ou 1, on choisit ± 1.

[B] L'électron est une particule élémentaire dont la projection du spin sur un axe ne peut prendre que deux valeurs : l'une est positive, l'autre négative et elles sont égales en valeur absolue.

[C] On utilise alors des conditions aux limites dites strictes et on parle de chaine rectiligne de spins.

[D] On utilise, dans ce cas, des conditions aux limites dites périodiques et ce modèle porte le nom d'anneau d'Ising.

un espace à une dimension. Il est bien-sur également possible et intéressant de disposer les spins dans un plan en utilisant un réseau carré ou triangulaire par exemple, ou encore, dans l'espace à trois dimension sur un réseau cubique.[E] D'une façon générale, on étudie le modèle d'ISING sur un réseau en dimension d où d est un entier naturel.[F]

L'état du système correspond donc à la donnée des N valeurs prises par les spins qui le constituent. On parle de configuration du système. Une configuration s'identifie ainsi à un N-uplet d'éléments de l'ensemble $\{-1; +1\}$.[G] En notant S_1, S_2, ..., S_N les spins et $\mathcal{C}$ une configuration, on peut écrire

$$\mathcal{C} = (S_i)_{i=1}^N = (S_1; S_2; \cdots; S_N) \tag{2}$$

et le nombre de configurations possibles pour le système est égal à

$$N_C = \mathrm{card}\,\{-1; +1\}^N = 2^N \tag{3}$$

où, pour un ensemble quelconque $\mathcal{A}$, card $\mathcal{A}$ désigne le nombre d'éléments de $\mathcal{A}$.[H]

On souligne que les spins ne sont pas indépendants en général : ils interagissent avec leurs plus proches voisins sur le réseau via une force dite ferromagnétique qui tend à les aligner. Ils sont également couplés au champ magnétique extérieur imposé au système et ont tendance à s'aligner avec ce dernier. Ces *"règles"* sont décrites dans le hamiltonien du modèle qui est présenté dans la section qui suit.

Sous l'effet de l'agitation thermique traduite par une température extérieure non nulle, les spins ont aussi un comportement aléatoire. Cette conséquence du désordre associé aux fluctuations thermiques sera étudiée ultérieurement.

Dans cette partie, on a donc introduit le spin d'ISING et la notion de configuration qui est aussi appelée micro-état du système. En effet, elle caractérise précisément le système d'un point de vue microscopique.

[E] Cela correspond aux modèles d'ISING bidimensionnel et tridimensionnel.

[F] Le cas $d = 0$ correspond à la situation triviale du réseau à un seul nœud : le système est composé d'un unique spin i.e. $N = 1$.

[G] Un N-uplet d'un ensemble $\mathcal{A}$ est une liste de N éléments appartenant chacun à $\mathcal{A}$; on peut dire que ce N-uplet est un élément de $\mathcal{A}^N$ où $\mathcal{A}^N = \mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A}$ est le produit cartésien de $\mathcal{A}$ avec lui même N fois.

[H] C'est ce que l'on appelle le cardinal de l'ensemble.