

## 6. FONDEMENTS DE LA MÉCANIQUE STATISTIQUE À L'ÉQUILIBRE

*Je commence cette partie en énonçant le postulat fondamental de la mécanique statistique à l'équilibre. Notons que, contrairement à la mécanique quantique ou à la relativité restreinte, la théorie de la mécanique statistique à l'équilibre repose sur un unique principe. Cette note est, en fait, à la marge du cours : bien qu'il soit intéressant pour le lecteur de connaître les fondements de cette théorie, le but de cette section est de démontrer certains résultats utilisés auparavant. Je vais notamment dériver l'équation (2) de la note précédente, c'est à dire, l'expression de la probabilité d'une configuration pour un système en situation canonique, ce que l'on appelle couramment la distribution de Boltzmann. Je prouverai aussi que c'est bien l'énergie libre qui est minimisée lorsqu'un système physique atteint son équilibre à température finie. Le postulat fondamental de la mécanique statistique à l'équilibre sert de point de départ aux démonstrations. La suite de cette note et le cœur des démonstrations sont plus techniques.*

*Maxime Baczyk, 2023*

On considère un système à l'équilibre et isolé. Ainsi, ses parois sont indéformables, imperméables et adiabatiques. Autrement dit, le système n'échange ni travail ni matière ni chaleur avec l'extérieur et, par conséquent, son volume  $V$ , son nombre de particules  $N$  et son énergie totale  $E$  sont des constantes. De cette manière, l'expérimentateur peut fixer les valeurs pour  $E$ ,  $N$  et  $V$  ; on dira que ce sont des paramètres extérieurs.

Un système isolé à l'équilibre avec  $E$ ,  $N$  et  $V$  comme paramètres extérieurs est dit en situation microcanonique. Cette configuration ne doit pas être confondue avec la situation canonique de modèle d'ISING qui nous intéresse dans ce cours. En effet, dans la situation canonique, les paramètres extérieurs sont  $T$ ,  $V$  et  $N$ . La température est fixée alors que l'énergie ne l'est plus ; on revient sur cette distinction avec précision dans la suite.

Il est nécessaire de bien distinguer les paramètres extérieurs des variables internes au système. Ces dernières sont des fonctions des degrés de liberté du système qui fluctuent selon les lois de la mécanique quantique et, aussi, en raison de l'agitation thermique.<sup>A</sup> Les variables internes sont donc modélisées comme des variables aléatoires alors, qu'au contraire, les paramètres extérieurs sont des constantes.

---

<sup>A</sup>Il intervient en général des fluctuations quantiques et des fluctuations thermiques. Dans la théorie des systèmes désordonnés où ceux-ci sont en présence d'un environnement aléatoire par exemple, il existe un troisième type de fluctuations : celles dues au désordre. Cela dit, dans le début de ce cours, on considère un modèle d'ISING classique et pur, c'est à dire, non quantique et sans désordre. Par conséquent, seules les fluctuations thermiques entrent en jeu. Des exemples connus de généralisations du modèle d'ISING avec du désordre sont le modèle de verres de spins, ou encore, le modèle d'ISING en champ aléatoire.

On parlera de manière équivalente de micro-état ou de configuration en référence à un état microscopique possible pour le système. En reprenant les notations des notes précédentes, le micro-état  $\mathcal{C}_k$  est associé à l'énergie  $\mathcal{E}_k$  et possède une certaine probabilité  $\mathbb{P}(\mathcal{C}_k)$  ; afin d'alléger l'écriture, on notera cette probabilité  $\mathbb{P}(\mathcal{C}_k) = p_k$ .

Un macro-état correspond, quant-à lui, à la donnée de tous les micro-états et de leur distribution de probabilité, c'est à dire, à la loi de la distribution des configurations du système.

La thermodynamique traditionnelle<sup>B</sup> est notamment basée sur une grandeur appelée entropie. Par exemple, le second principe de la thermodynamique classique stipule que tout système est caractérisé par une fonction d'état appelée entropie et que, lorsque le système isolé est le siège d'une transformation irréversible, cette fonction augmente jusqu'à une valeur maximale atteinte pour la situation d'équilibre. La théorie de la mécanique statistique à l'équilibre développée par BOLTZMANN permet de retrouver ce résultat, vu alors comme une conséquence d'un postulat plus fondamental que l'on énonce ici.

L'entropie statistique est définie d'une façon générale par

$$(1) \quad \mathcal{S} = -k_B \sum_k p_k \ln p_k$$

où  $k_B$  est la constante de BOLTZMANN.<sup>C</sup> On rappelle que  $\mathcal{S}$  mesure le désordre dans le système et cette grandeur doit être additive et extensive.<sup>D</sup>

Pour un système en situation microcanonique d'énergie  $E$ , un micro-état  $\mathcal{C}_k$  va être accessible si son énergie  $\mathcal{E}_k$  est comprise entre  $E$  et  $E + \delta E$  où  $\delta E$  est l'erreur de mesure faite par l'expérimentateur sur l'énergie du système étudié.

---

<sup>B</sup>Celle-ci a été développée avant la mécanique statistique afin de comprendre les échanges thermiques, ou encore, les changements d'états de la matière. Elle repose sur plusieurs grands principes établis de façon empirique et ne permet pas une description générale et rigoureuse des systèmes à plusieurs particules.

<sup>C</sup>La constante de BOLTZMANN est reliée à la constante des gaz parfaits  $R$  en chimie par  $k_B = R/\mathcal{N}_A$ ,  $\mathcal{N}_A$  étant le nombre d'AVOGADRO. Ainsi, par exemple, l'équation d'état des gaz parfaits bien connue en chimie

$$PV = nRT$$

où  $n$  est la quantité de matière en moles, prend en physique la forme qui suit

$$PV = Nk_B T$$

où  $N$  est le nombre de corps du système.

<sup>D</sup>Une grandeur  $\mathcal{S}$  est dite additive si, lorsque le système est la réunion de deux sous systèmes  $s = s_1 \cup s_2$ , alors on a  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ . On parle aussi de quantité extensive lorsque celle-ci est proportionnelle au nombre de particules de système.

Le postulat fondamental de la physique statistique à l'équilibre est le suivant :

Pour un système à l'équilibre en situation microcanonique, tous les micro-états accessibles sont équiprobables.

Ainsi, en notant  $\Omega(E)$  le nombre de micro-états accessibles pour un système d'énergie  $E$ , le principe s'écrit

$$(2) \quad p_k = \begin{cases} 1/\Omega(E) & \text{si } \mathcal{E}_k \in [E; E + \delta E] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\delta E$  est l'erreur de mesure sur l'énergie faite par l'expérimentateur.

En utilisant cette distribution de probabilité dans l'équation (1), on établit facilement l'expression très connue de l'entropie microcanonique, que l'on notera  $\mathcal{S}^*$ .

$$(3) \quad \mathcal{S}^* = k_B \ln \Omega(E)$$

Un autre concept important est la notion de densité d'états. Puisqu'il y a toujours une erreur de mesure, l'énergie du système en situation microcanonique est comprise entre  $E$  et  $E + \delta E$ . La densité d'états  $\rho(E)$  est définie par

$$(4) \quad \Omega(E) = \rho(E) \delta E$$

$\rho(E)$  correspond donc au nombre de micro-états par unité d'énergie ; elle se mesure en  $\text{J}^{-1}$ . Il est, de plus, possible de montrer à partir de calculs classiques ou quantiques sur différents systèmes que l'on a en général

$$(5) \quad \rho(E) \propto E^{f/2}$$

où  $f$  est le nombre de degrés de liberté du système<sup>E</sup> et  $\propto$  désigne la relation de proportionnalité. Pour un système macroscopique tel que  $f \propto N \simeq \mathcal{N}_A \simeq 10^{24}$ ,  $\rho$  est donc une fonction extrêmement croissante de l'énergie.

On introduit enfin la température microcanonique, notée  $T^*$  ; elle est définie comme l'inverse de la variation d'entropie par rapport à une variation d'énergie :

$$(6) \quad \frac{1}{T^*} = \partial_E \mathcal{S}^*$$

où  $\partial_E = (\partial/\partial E)$  est une notation pour l'opérateur de dérivée partielle par rap-

<sup>E</sup>Le nombre de degrés de liberté d'un modèle d'ISING est égal au nombre de spins  $f = N$ . Cependant, pour un système de particules pouvant se mouvoir dans l'espace physique tridimensionnel et sans espace interne, on a  $f = 3N$ .

port à l'énergie.<sup>F</sup>

Les bases étant posées, on commence maintenant les démonstrations rigoureuses nécessaires à la compréhension complète du cours.

---

## Équilibre thermique entre deux sous systèmes d'un système isolé

Ces premiers calculs sont nécessaires à la compréhension de la dérivation de la distribution de BOLTZMANN qui suit.

Afin de faire le lien avec la situation canonique dans laquelle le système étudié réuni avec son thermostat forment un ensemble isolé, on étudie donc l'équilibre entre deux sous systèmes d'un système isolé.

Soit le système  $s = s_1 \cup s_2$  en situation microcanonique d'énergie  $E$ ,  $s_1$  et  $s_2$  étant les deux sous systèmes. On peut négliger la chaleur due aux échanges d'énergie par collision sur la paroi entre  $s_1$  et  $s_2$ . De cette manière, on pourra noter une configuration du système total sous la forme  $\mathcal{C}_k = (\mathcal{C}_{k_1}; \mathcal{C}_{k_2})$  et son énergie sera  $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_{k_1} + \mathcal{E}_{k_2}$ .<sup>G</sup> Ainsi, l'énergie du sous système  $s_1$  est une variable interne. On va tenter de déterminer la probabilité que celle-ci soit comprise entre  $E_1$  et  $E_1 + \delta E_1$ . En notant  $\mathcal{P}(E_1)$  la densité de probabilité associée, c'est à dire que la probabilité recherchée s'identifie à  $\mathcal{P}(E_1) \delta E_1$ , on peut écrire

$$(8) \quad \mathcal{P}(E_1) \delta E_1 = \frac{\rho_1(E_1) \delta E_1 \rho_2(E - E_1) \delta E}{\Omega(E)}$$

Ce qui se simplifie en

$$(9) \quad \mathcal{P}(E_1) = \frac{\rho_1(E_1) \rho_2(E - E_1) \delta E}{\Omega(E)}$$

On cherche alors la valeur la plus probable de l'énergie du système  $s_1$ , c'est à

---

<sup>F</sup> On peut aussi introduire la pression microcanonique et le potentiel chimique microcanonique. Ceux-ci sont respectivement définis tels que

$$\partial_V \mathcal{S}^* = \frac{P^*}{T^*}$$

et

$$\partial_N \mathcal{S}^* = -\frac{\mu^*}{T^*}$$

On retrouve, de cette manière, une identité bien connue en thermodynamique :

$$(7) \quad dE = T^* dS - P^* dV + \mu^* dN$$

<sup>G</sup> Ceci est une conséquence du produit tensoriel en mécanique quantique, notion assez complexe que l'on ne développera pas ici.

dire, le maximum de  $\mathcal{P}$ .

En appliquant le logarithme dans les deux membres de l'égalité précédente, puis en dérivant par rapport à  $E_1$ , il vient

$$(10) \quad \frac{d \ln \mathcal{P}(E_1)}{dE_1} = \frac{d}{dE_1} \ln \rho_1(E_1) - \frac{d}{dE_2} \ln \rho_2(E_2)$$

avec  $E_2 = E - E_1$ .

Pour un système d'énergie  $E$ , on posera

$$(11) \quad \beta(E) = \frac{d}{dE} \ln \rho(E)$$

Par conséquent, un extremum de la densité de probabilité  $\mathcal{P}(E_1)$  est obtenu en annulant (10), et donc, par l'équation

$$(12) \quad \beta_1(E_1) = \beta_2(E_2)$$

Il est, cependant, nécessaire de dériver une seconde fois le logarithme de  $\mathcal{P}(E_1)$  afin de s'assurer qu'il s'agit bien d'un maximum i.e. de trouver une dérivée seconde négative. On calcule alors en re-dérivant :

$$(13) \quad \frac{d^2 \ln \mathcal{P}(E_1)}{dE_1^2} = \frac{d}{dE_1} \beta_1(E_1) + \frac{d}{dE_2} \beta_2(E_2)$$

Si l'on utilise maintenant le fait que  $\rho(E) \propto E^{f/2}$ , on peut écrire

$$(14) \quad \rho_1(E_1) = C_1 E_1^{f_1/2} \quad \text{et} \quad \rho_2(E_2) = C_2 E_2^{f_2/2}$$

Ce qui donne de suite

$$(15) \quad \beta_1(E_1) = \frac{f_1}{2 E_1} \quad \text{et} \quad \beta_2(E_2) = \frac{f_2}{2 E_2}$$

Enfin, en notant  $\tilde{E}_1$  l'extremum de  $\mathcal{P}(E_1)$ , on obtient

$$(16) \quad \left. \frac{d^2 \ln \mathcal{P}(E_1)}{dE_1^2} \right|_{\tilde{E}_1} = -\frac{f_1}{2 \tilde{E}_1^2} - \frac{f_2}{2 (E - \tilde{E}_1)^2} < 0$$

Cette valeur négative indique que  $\tilde{E}_1$  est bien un maximum :  $\tilde{E}_1$  est la valeur la plus probable pour l'énergie du sous système  $s_1$ .

En reprenant l'Eq. (12), il vient

$$(17) \quad \frac{f_1}{\tilde{E}_1} = \frac{f_2}{E - \tilde{E}_1}$$

On pose  $\tilde{E}_2 = E - \tilde{E}_1$  et, puisque le système total contient  $f_1 + f_2$  degrés de liberté, on aboutit à

$$(18) \quad \frac{\tilde{E}_1}{f_1} = \frac{\tilde{E}_2}{f_2} = \frac{E}{f_1 + f_2}$$

Pour terminer, la combinaison des expressions des Eqs (3), (4), (6) et (11) permet d'établir

$$(19) \quad \beta(E) = \frac{1}{k_B T^*(E)}$$

et l'égalité (12) se retranscrit donc comme

$$(20) \quad T_1^*(\tilde{E}_1) = T_2^*(E - \tilde{E}_1)$$

On vient d'aboutir au résultat suivant : la valeur la plus probable de l'énergie d'un des sous système s'obtient en égalant les températures microcanoniques des deux sous systèmes.

### Situation canonique et distribution de Boltzmann

On passe désormais à la situation canonique ; pour faire le lien avec ce qui précède, on considère l'ensemble total, c'est à dire, la réunion du thermostat et du système étudié. On notera  $\pi$  le thermostat et  $s$  le sous système qui est étudié en configuration canonique, le système total étant  $\pi \cup s$ . Ce dernier est, quant-à lui, en situation microcanonique avec une énergie comprise entre  $E_0$  et  $E_0 + \delta E_0$ .

Concernant  $\pi$ , par définition du thermostat, il possède un nombre de degrés de liberté bien supérieur à celui du système étudié :

$$(21) \quad f_\pi \gg f_s$$

et sa température microcanonique est quasiment indépendante de l'énergie du système  $s$  :

$$(22) \quad |\partial_{E_s} T_\pi^*| \ll 1$$

A l'équilibre et d'après les résultats précédents, on doit avoir

$$(23) \quad \beta_\pi(E_0 - \tilde{E}_s) = \beta_s(\tilde{E}_s)$$

Or, par développement limité au premier ordre,

$$(24) \quad \beta_\pi(E_0 - \tilde{E}_s) \simeq \beta_\pi(E_0) - \tilde{E}_s \partial_{E_s} \beta_\pi(E_0)$$

Si l'on examine le second terme du membre de droite, on peut voir par dérivation composée ainsi qu'en utilisant l'Eq. (19) et la propriété du thermostat (22) que ce terme est parfaitement négligeable. Ainsi, on a nécessairement à l'équilibre

$$(25) \quad \beta_\pi(E_0) = \beta_s(\tilde{E}_s)$$

Et, comme  $\tilde{E}_s/E_0 \simeq f_s/f_\pi \ll 1$ , on aboutit à

$$(26) \quad T_s^*(\tilde{E}_s) = T_\pi^*(E_0) = T_\pi^*(E_\pi)$$

Le thermostat impose donc sa température au sous système étudié :  $T = T_s^*(\tilde{E}_s) = T_\pi^*(E_\pi)$  est le paramètre extérieur de la situation canonique et l'on vient de montrer que celui-ci est égal à la température microcanonique du thermostat. L'énergie  $E_s$  est, quant-à elle, une variable interne qui fluctue.

On s'attache maintenant à dériver la distribution de BOLTZMANN pour un système en situation canonique.

Soient  $\Omega_{\text{tot}}(E_0)$  le nombre de micro-états accessibles au système total et  $\Omega_\pi(E_0 - \mathcal{E}_k)$  le nombre de micro-états d'énergie  $E_0 - \mathcal{E}_k$  accessibles pour le thermostat. D'après le postulat d'équiprobabilité, la probabilité canonique d'une configuration  $\mathcal{C}_k$  pour le système  $s$  s'identifie alors à

$$(27) \quad p_k^c = \frac{\Omega_\pi(E_0 - \mathcal{E}_k)}{\Omega_{\text{tot}}(E_0)}$$

Or, par développement limité, il vient

$$(28) \quad \ln \Omega_\pi(E_0 - \mathcal{E}_k) \simeq \ln \Omega_\pi(E_0) - \mathcal{E}_k \partial_{E_\pi} \ln \Omega_\pi(E_0) = \ln \Omega_\pi(E_0) - \mathcal{E}_k \beta$$

avec  $\beta = 1/(k_B T)$ . Ainsi  $\Omega_\pi(E_0 - \mathcal{E}_k)$  est proportionnel à  $e^{-\beta \mathcal{E}_k}$  et la probabilité recherchée  $p_k^c$  l'est donc également.

$$(29) \quad p_k^c \propto e^{-\beta \mathcal{E}_k}$$

Autrement dit,

$$(30) \quad p_k^c = C e^{-\beta \mathcal{E}_k}$$

La constante  $C$  se détermine par la condition de normalisation. La somme des probabilités sur tous les micro-états doit être égale à 1 :

$$(31) \quad \sum_k p_k^c = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{1}{\sum_k e^{-\beta \mathcal{E}_k}}$$

Et, finalement, on pose

$$(32) \quad C = \frac{1}{\mathcal{Z}}$$

On vient donc d'établir le résultat attendu ; l'expression de la distribution de BOLTZMANN pour un système en situation canonique.

$$(33) \quad p_k^c = \frac{e^{-\beta \mathcal{E}_k}}{\mathcal{Z}}$$

où

$$(34) \quad \mathcal{Z} = \sum_k e^{-\beta \mathcal{E}_k}$$

est la fonction de partition du système, déjà introduite dans la note précédente.

### Entropie canonique et formule de Helmotz

On rappelle la définition de l'énergie libre :

$$(35) \quad \mathcal{F} = -\frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z}$$

Puisque  $\beta \partial_\beta = -T \partial_T^{\text{H}}$  et  $\partial_\beta \ln \mathcal{Z} = -\bar{E}^c$  où  $\bar{E}^c$  est la moyenne canonique de l'énergie,<sup>I</sup> il n'est pas difficile d'établir

$$(36) \quad \bar{E}^c = \mathcal{F} - T \partial_T \mathcal{F}$$

Cette identité est appelée formule de HELMOLTZ.

On revient désormais sur l'entropie statistique dont la définition générale est donnée par l'Eq. (1). En injectant dans cette formule l'expression de la probabilité canonique d'une configuration, c'est à dire, la distribution de BOLTZMANN,

<sup>H</sup>En effet,

$$\beta \frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{1}{k_B T} \frac{\partial T}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial T} = \frac{1}{k_B T} \left(-\frac{1}{\beta^2}\right) \frac{\partial}{\partial T} = -T \frac{\partial}{\partial T}$$

où l'on a utilisé la dérivation composée et la définition de  $\beta$ . Dans le cours, les dérivées partielles, comme  $\partial/\partial T$  par exemple, sont notées plus simplement  $\partial_T$ .

<sup>I</sup>Ceci n'est pas difficile à démontrer en utilisant la distribution de BOLTZMANN et a déjà été abordé dans la note 5. Pour plus de précision et éviter les confusion, on note ici cette énergie moyenne  $\bar{E}^c$  (que l'on avait dénotée par  $\mathcal{E}$  dans le cours précédent).



on peut calculer

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}^c &= -k_B \sum_k \frac{e^{-\beta \mathcal{E}_k}}{\mathcal{Z}} \ln \frac{e^{-\beta \mathcal{E}_k}}{\mathcal{Z}} \\
 &= -k_B \sum_k \frac{e^{-\beta \mathcal{E}_k}}{\mathcal{Z}} \left( -\beta \mathcal{E}_k - \ln \mathcal{Z} \right) \\
 (37) \quad &= \frac{k_B \beta}{\mathcal{Z}} \sum_k e^{-\beta \mathcal{E}_k} \mathcal{E}_k + \frac{k_B \ln \mathcal{Z}}{\mathcal{Z}} \sum_k e^{-\beta \mathcal{E}_k} \\
 &= \frac{\bar{E}^c}{T} + k_B \ln \mathcal{Z}
 \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à

$$(38) \quad \mathcal{F} = \bar{E}^c - T \mathcal{S}^c$$

On a donc démontré la formule fondamentale reliant énergie libre, énergie moyenne et entropie qui avait déjà été abordée dans la note précédente.

### Évolution du système après relâchement d'une contrainte

Pour finir, on traite le cas de l'évolution du système après relâchement d'une contrainte.

Comme précédemment, on s'intéresse au système total  $s \cup \pi$  d'énergie  $E_0$  et réunion du système canonique et du thermostat. Ses micro-états sont  $(\mathcal{C}_k; \mathcal{K}_l)$  où le premier élément du couple est une configuration du système  $s$  et le second en est une du thermostat. Ainsi, la probabilité d'un micro-état du système total sera donnée par

$$(39) \quad p_{kl} = p_l^*(E_0 - \mathcal{E}_k) p_k^c(\mathcal{E}_k)$$

et l'entropie totale est égale à

$$(40) \quad \mathcal{S}_{\text{tot}} = -k_B \sum_{k,l} p_{kl} \ln p_{kl}$$

En utilisant l'expression (39) dans la formule de l'entropie ci-dessus et grâce à quelques manipulations algébriques, on peut établir

$$(41) \quad \mathcal{S}_{\text{tot}} = \sum_k p_k^c(\mathcal{E}_k) \mathcal{S}_\pi^*(E_0 - \mathcal{E}_k) + \mathcal{S}^c$$

Or, par développement limité du premier ordre,

$$(42) \quad \mathcal{S}_\pi^*(E_0 - \mathcal{E}_k) \simeq \mathcal{S}_\pi^*(E_0) - \mathcal{E}_k \partial_{\mathcal{E}_\pi} \mathcal{S}_\pi^*(E_0)$$

En tenant compte de la définition de la température microcanonique du thermostat, on a  $\partial_{\mathcal{E}_\pi} \mathcal{S}_\pi^*(E_0) = 1/T$  et  $T$  s'identifie au paramètre extérieur du système  $s$  en configuration canonique. D'où

$$(43) \quad \mathcal{S}_{\text{tot}} = \mathcal{S}_\pi^*(E_0) \sum_k p_k^c(\mathcal{E}_k) - \frac{1}{T} \sum_k p_k^c(\mathcal{E}_k) \mathcal{E}_k + \mathcal{S}^c$$

Et donc<sup>J</sup>

$$(44) \quad \mathcal{S}_{\text{tot}} = \mathcal{S}_\pi^*(E_0) - \frac{\mathcal{F}}{T}$$

Cette entropie totale se maximise à la position d'équilibre du système  $s \cup \pi$ . Cela implique que  $\mathcal{F}$  doit être minimale à l'équilibre : l'énergie libre décroît constamment jusqu'à un certain minimum correspondant à l'équilibre.

Pour conclure, on a établi des résultats fondamentaux utilisés dans le cours en se basant sur l'entropie statistique et le postulat fondamental de la mécanique statistique à l'équilibre.

---

<sup>J</sup>La somme des probabilités vaut l'unité :

$$\sum_k p_k^c(\mathcal{E}_k) = 1$$

et l'on peut faire apparaître l'énergie moyenne dans l'autre terme

$$\sum_k p_k^c(\mathcal{E}_k) \mathcal{E}_k = \bar{E}^c$$

Enfin, puisque  $\mathcal{F} = \bar{E}^c - T\mathcal{S}^c$ , on obtient la ligne d'équation suivante.