Théorie des probabilités

Ceci est un formulaire/aide-mémoire concernant la théorie des probabilités de niveau universitaire L2. Ces notes peuvent également servir d'index et de plan (suite de définitions et de propositions) pour élaborer un cours de probabilités après le bac. Le vocabulaire introduit et associé à chaque définition est mis en relief et la plupart des formules utiles sont écrites, numérotées et encadrées. Il fait suite à des enseignements que j'ai pu effectuer à la faculté de mathématiques de l'université Paris VI en classes de travaux dirigés entre les années 2010 et 2013 ainsi qu'à des cours privés plus récemment.

Maxime Baczyk, 2023

"Quels que soient les progrès des connaissances humaines, il y aura toujours place pour l'ignorance et par suite pour le hasard et la probabilité."

Emile Borel

Table des matières

A Combinatoire

La combinatoire ou dénombrement est la science de compter ; on compte le nombre d'éléments d'un ensemble. Cela a un intérêt en théorie de probabilités : par exemple, pour une probabilité uniforme, c'est à dire, lorsque toutes les issues sont équiprobables, la probabilité d'un événement A quelconque est donnée par

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega}$$

où Ω est l'univers des possibles c'est à dire l'ensemble de toutes les issues possibles et l'événement A est, par définition, un sous ensemble de Ω. Dans la formule ci-dessus, $\operatorname{card} A$ et $\operatorname{card} \Omega$ désignent le nombre d'éléments des ensembles A et Ω. La probabilité d'un événement dans le cas uniforme s'identifie donc au rapport du nombre d'issues favorables par le nombre total d'issues. Ce qui implique le dénombrement des issues.

On parle aussi de cardinalité des ensembles pour la théorie du nombre d'éléments de ces derniers.

A.1 Cardinalité des ensembles finis

★ *déf. de l'**ensemble** E_n :*

(1) $$\boxed{E_n = \{1, \cdots, n\}}$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$,
*déf. d'un **ensemble fini**,*
*déf. du **cardinal d'un ensemble fini**,*
not. $\operatorname{card} E$ ou $|E|$,
cas où $E = \phi$ ($\operatorname{card} E = 0$).

⇒ trois prop. sur les sous-ensembles d'un ensemble fini,
prop. sur l'équipotence deux ensembles finis.

⇒ prop. sur le cardinal de l'union de deux sous-ensembles d'un ensemble fini

(2) $$\boxed{\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B)}$$

prop. : généralisation de la formule pour l'union de n sous-ensembles : formule du crible de Poincaré.

⇒ prop. sur le cardinal du complémentaire d'un sous-ensemble d'un ensemble fini,
deux prop. sur le produit cartésien d'ensembles finis $E \times F$.

⇒ prop. sur le cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini

(3) $$\boxed{\operatorname{card} \mathcal{P}(E) = 2^n}$$

avec $n = \operatorname{card} E$.

A.2 Combinatoire

★ *déf. d'un **k-uplet** ou **k-liste** d'éléments d'un ensemble fini.*

⇒ prop. sur le nombre de k-uplets distincts

(4) $$\boxed{N_n^k = n^k}$$

★ *déf. d'une **permutation d'un ensemble**,*
not. $S(E)$ et $S_n = S(E_n)$ pour l'ensemble des permutations d'un ensemble.

⇒ prop. sur le cardinal de l'ensemble des permutations d'un ensemble fini

(5) $$\boxed{\operatorname{card} S(E) = n!}$$

où $n = \operatorname{card} E$,
conv. $0! = 1$.

★ *déf. d'un **arrangement de taille k d'éléments d'un ensemble fini**,*
not. A_n^k pour le nombre d'arrangements distincts de taille k d'éléments d'un ensemble de cardinal n ($k \leqslant n$).

⇒ prop. sur le nombre d'arrangements :

(6) $$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

★ *déf. d'une* ***combinaison de taille k d'éléments d'un ensemble fini****,*
déf. du ***coefficient binomial****,*
not. $C_n^k = \binom{n}{k}$ pour le nombre de combinaisons distinctes de taille k d'éléments d'un ensemble de cardinal n ($k \leqslant n$).

$\Rightarrow$ prop. sur le nombre de combinaisons

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}} \tag{7}$$

$\Rightarrow$ prop. sur les expressions de $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{2}$.

$\Rightarrow$ prop. : formule du binôme dans un anneau commutatif

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}} \tag{8}$$

avec $x, y \in \mathbb{A}$ où $\mathbb{A}$ est un anneau commutatif.

$\Rightarrow$ prop. sur $\binom{n}{n-k}$,
prop. sur $k\binom{n}{k}$,
prop sur la formule du triangle de Pascal,
algo. du triangle de Pascal.

★ ***Généralisation du coefficient binomial*** *:*

$$\boxed{\binom{\alpha}{k} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)/k!} \tag{9}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ prop. sur la série entière $(1+X)^\alpha$

$$\boxed{(1+X)^\alpha = \sum_{k \geqslant 0} \binom{\alpha}{k} X^k} \tag{10}$$

B Probabilité sur un univers fini

Dans une expérience aléatoire, il est illusoire de chercher à déterminer "exactement" le comportement du système. Cependant, la théorie des probabilités permet d'estimer le comportement en moyenne ou en fréquence, et d'affirmer que tel ou tel événement à tant de chances de se produire.

Étant donnés les résultats d'une expérience aléatoire, la statistique permet de caractériser la loi de probabilité qui régit le hasard. Et réciproquement, si l'on connaît a priori la loi qui gouverne le hasard, le calcul de probabilités donne des prédictions sur les résultats de l'expérience.

Une probabilité est la donnée de deux objets mathématiques : un ensemble Ω qui représente les différentes versions du hasard et une loi qui à tout événement donne sa fréquence.

On considère ici une expérience aléatoire où l'ensemble des résultats possibles Ω est fini.

B.1 Événements

★ *déf. de **l'univers des possibles**,*
not. Ω*,*
*déf. d'une **issue** ou **éventualité** ou **réalisation du hasard*** $\omega \in \Omega$*,*
*déf. d'un **événement*** $A \subset \Omega$*,*
*déf. des **événements certains**, **impossibles**, **élémentaires**.*

B.2 Probabilités

★ *déf. d'une **probabilité*** $\mathbb{P}$ ***sur*** Ω *(deux axiomes dont la condition de normalisation),*
*déf. d'un **espace de probabilités** ou **espace probabilisé*** $(\Omega, \mathbb{P})$.

★ *déf. de **l'événement contraire** de* A*.*

$\Rightarrow$ prop. sur $\mathbb{P}(A^c)$ (en particulier $\mathbb{P}(\phi) = 0$).

$\Rightarrow$ prop. sur la probabilité d'un sous-ensemble d'un événement.

$\Rightarrow$ prop. : $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$.

$\Rightarrow$ prop. sur la probabilité de l'union de n événements disjoints deux à deux :

$$\boxed{\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)} \tag{11}$$

$\Rightarrow$ prop. sur le n-uplet $(p_1;\cdots;p_n) \in [0,1]^n$ tel que $\sum_i p_i = 1$ (lorsque $\operatorname{card}\Omega = n$).

★ *déf. d'une **probabilité uniforme**.*

$\Rightarrow$ th. d'équiprobabilité (probabilité uniforme) :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{\operatorname{card} A}{n}} \tag{12}$$

où $n = \operatorname{card}\Omega$.

B.3 Probabilités conditionnelles et indépendance

★ *déf. de la **probabilité conditionnelle de** A **sachant** B :*

$$\boxed{\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}} \tag{13}$$

$\Rightarrow$ prop. sur la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_B(A)$.

★ *déf. de **deux événements indépendants** :*

$$\boxed{\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)} \tag{14}$$

*déf. de n **événements indépendants**.*

C Variables aléatoires

Une variable aléatoire peut être vue comme une variable dont les valeurs sont prises avec une certaine probabilité.

Prenons l'exemple du lancé de deux dés et intéressons nous à la somme des deux faces obtenues ; cette expérience aléatoire est associée à une espace probabilisé $(\Omega; \mathbb{P})$ où $\Omega = \{(x; y), x, y \in E_6\}$ et $\mathbb{P}$ est une probabilité uniforme. La somme des deux faces, que l'on notera S, peut prendre des valeurs entre 2 et 12 et leurs probabilités ne sont pas égales : par exemple, $\mathbb{P}(S = 12) = 1/36$ et $\mathbb{P}(S = 7) = 6/36 = 1/6$.

Ainsi, une variable aléatoire sert a transporter la hasard d'un espace probabilisé à un autre : ici, on est parti d'une expérience aléatoire sur $(\Omega; \mathbb{P})$ comme décrit ci-dessus et, en étudiant la somme, on se place dans un autre espace probabilisé $(\mathcal{P}(\{2; 3; \cdots; 12\}); \mu_S)$ où μ_S est ce qu'on appelle la loi de la variable aléatoire S et correspond à la donnée des probabilités de toutes les réalisations possibles.

Les variables aléatoires continuent une application fondamentale de la théorie des probabilités.

C.1 Définitions élémentaires

★ *déf. d'une* ***variable aléatoire à valeurs dans un ensemble*** E*,*
déf. d'une ***variable aléatoire réelle*** *:* $E \subset \mathbb{R}$.

★ *déf. de l'****événement*** $(X = x)$*,*
*déf. de l'****événement*** $(X \in C)$ *(où* $x \in E$ *et* $C \subset E$*).*

★ *déf. de la* ***variable aléatoire indicatrice d'un événement*** $\mathbb{I}_A$.

★ *déf. de* ***l'indépendance de*** n ***variables aléatoires à valeurs dans*** E.

C.2 Loi d'une variable aléatoire

★ *déf. de la* ***loi*** μ_X ***de la variable aléatoire*** X.

⇒ th. sur le transport du hasard : (E, μ_X) est un espace probabilisé.

$\Rightarrow$ prop. : caractérisation de la loi μ_X pour $E = \{x_1, \cdots, x_m\}$.

C.3 Espérance et variance d'une variable aléatoire

On suppose que X est variable aléatoire réelle et Ω fini.

★ *déf. de l'**espérance d'une variable aléatoire** :*

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\, \mathbb{P}(\{\omega\})} \tag{15}$$

$\Rightarrow$ prop. sur expression de l'espérance ($E = \{x_1, \cdots, x_m\}$)

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i\, \mu_X(\{x_i\}) = \sum_{i=1}^{m} x_i\, \mathbb{P}(X = x_i)} \tag{16}$$

Plus généralement :

$$\boxed{\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)\, \mu_X(\{x_i\}) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)\, \mathbb{P}(X = x_i)} \tag{17}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ prop. sur la linéarité de l'espérance,
prop. sur l'espérance de X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$,
prop. sur l'espérance d'une variable aléatoire constante,
prop. sur la comparaison de deux variables aléatoires (et l'espérance),
prop. sur X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\mathbb{E}(X) = 0$.

$\Rightarrow$ prop. :

$$\mathbb{E}(|X|) \geqslant |\mathbb{E}(X)| \tag{18}$$

★ *déf. du **moment d'ordre** n **d'une variable aléatoire**.*

★ ***déf.* de la *variance d'une variable aléatoire* :**

(19) $$\boxed{\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}$$

⇒ prop. sur l'expression de la variance :

(20) $$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

⇒ prop. : $\mathrm{Var}(X) \geqslant 0$,
prop. sur le cas $\mathrm{Var}(X) = 0$.

★ ***déf.* de *l'écart type d'une variable aléatoire* :**

(21) $$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}}$$

⇒ Deux prop. pour deux variables aléatoires indépendantes (espérance du produit et variance de la somme).

⇒ th. : Inégalité de Markov,
prop. : corollaire de l'inégalité de Markov,
th. : inégalité de Bienaymé-Tchebitchev.

D Loi binomiale

La loi binomiale permet d'illustrer les notions générales du chapitre précédent dans le cadre d'une expérience aléatoire simple appelée schéma de Bernoulli ; ce dernier consiste à répéter n fois de manière identique et indépendante une expérience aléatoire à deux issues : le succès ou l'échec. Cette loi simple est très utilisée dans plusieurs domaines des sciences et notamment en physique.

D.1 Épreuve et Loi de Bernoulli

★ *déf. d'une **épreuve de Bernoulli de paramètre** $p \in [0, 1]$,*
rem. sur l'espace probabilisé.

★ *déf. d'une **loi de Bernoulli** $\mathcal{B}(p)$.*

$\Longrightarrow$ prop. sur une définition équivalente en caractérisant la loi.

$\Longrightarrow$ Prop. sur l'espérance et la variance d'une variable aléatoire de Bernoulli

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbb{E}(X) = p \\ \mathrm{Var}(X) = p(1-p)\end{array}} \tag{22}$$

D.2 Schéma de Bernoulli et Loi binomiale

★ *déf. d' un **schéma de Bernoulli de paramètre** $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times [0, 1]$,*
rem. sur l'espace probabilisé.

★ *déf. d'une **loi binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$.*

$\Longrightarrow$ prop. sur une définition équivalente en caractérisant la loi

$$\boxed{\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} \tag{23}$$

pour $k \in \{0, \cdots, n\}$.

$\Longrightarrow$ prop. sur une définition équivalente (somme de n lois $\mathcal{B}(p)$ indépendantes).

$\Longrightarrow$ prop. sur l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbb{E}(X) = np \\ \mathrm{Var}(X) = np(1-p)\end{array}} \tag{24}$$

⇒ prop. sur la loi de $n - X$ pour $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

⇒ prop. sur la loi de $X_1 + X_2$ pour $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$, $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ avec X_1 et X_2 indépendantes.

E Lois discrètes usuelles

D'autres lois, dites discrètes, sont présentées et étudiées dans ce chapitre. Les lois discrètes s'associent à des variables aléatoires dont des les valeurs sont prises dans des ensembles au plus dénombrables, mais pas nécessairement finis.

Prenons l'exemple de la loi binomiale négative : l'expérience aléatoire associée correspond à un schéma de Bernoulli avec n tendant vers l'infini. La loi binomiale négative est alors la loi de la varaible aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaires afin d'obtenir n succès.

Puisque les ensembles de valeurs possibles de variables aléatoires discrètes, bien que dénombrables, sont infinis, il est nécessaire de généraliser la notion de probabilités pour un univers des possibles Ω infini, la théorie générale et unifiée des probabilités est d'un niveau plus avancé et n'est pas présentée dans ce cours.

Il est d'ores et déjà possible d'étendre la notion de probabilité sur un univers Ω infini et dénombrable : $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé si $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}^+$ vérifie les deux axiomes qui suivent

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

et pour une suite $(A_n)_{n \geqslant 0}$ d'événements disjoints

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n \geqslant 0} A_n\Big) = \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$$

Le membre de droite s'identifie donc à la somme d'une série.

On peut établir un résultat important concernant les suites d'événements $(A_n)_{n \geqslant 0}$ croissantes et décroissantes avec la relation d'ordre d'inclusion $\subset$. Si la suite d'événements est croissante, on obtient en effet

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n \geqslant 0} A_n\Big) = \lim_{n} \mathbb{P}(A_n)$$

et pour une suite décroissante

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\geqslant 0} A_n\Big) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$$

Finalement, pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la série de terme général $n\,\mathbb{P}(X=n)$ converge, on définira l'espérance comme

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n\geqslant 0} n\,\mathbb{P}(X=n)$$

E.1 Loi uniforme

★ *déf. d'une* ***loi uniforme discrète sur*** $A \subset \mathbb{Z}$ ***fini*** *:*

(25) $$\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{card\,A}$$

pour $k \in A$.

E.2 Loi binomiale négative

★ *déf. de l'**expérience aléatoire pour une loi binomiale négative**.*
rem. sur l'espace probabilisé ($\Omega = \{S;E\}^{\mathbb{N}^*}$).

★ *déf. d'une* ***loi binomiale négative*** $\mathcal{B}neg(n,p)$ *où* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in]0,1]$.

⇒ prop. sur une définition équivalente en caractérisant la loi

(26) $$\boxed{\mathbb{P}(Y_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}}$$

pour $k \in \{n, n+1, \cdots\} = \mathbb{N} \setminus \{0, \cdots, n-1\}$.

⇒ prop. sur l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale négative

(27) $$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n) &= \frac{n}{p} \\ \mathrm{Var}(Y_n) &= \frac{n(1-p)}{p^2} \end{aligned}}$$

E.3 Loi géométrique

★ *déf. de la* ***loi géométrique*** $\mathcal{G}(p)$ ***où*** $p \in]0,1]$ *:*

(28) $$\boxed{\mathcal{G}(p) = \mathcal{B}neg(1,p)}$$

⇒ prop. sur une définition équivalente en caractérisant la loi

(29) $$\boxed{\mathbb{P}(Y=k) = p(1-p)^{k-1}}$$

pour $k \in \mathbb{N}^*$.

⇒ prop. sur l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique

(30) $$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{E}(Y_n) = \dfrac{1}{p} \\ \mathrm{Var}(Y_n) = \dfrac{1-p}{p^2} \end{array}}$$

⇒ prop. sur la loi de $\sum_{i=1}^{n} X_i$ pour des $X_i \sim \mathcal{G}(p)$ indépendantes entre elles.

E.4 Loi de Poisson

★ *déf. de la* ***loi de Poisson*** $\mathcal{P}(\lambda)$ *où* $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$ *:*

(31) $$\boxed{\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}}$$

pour $k \in \mathbb{N}$.

⇒ prop. sur l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson :

(32) $$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{E}(X) = \lambda \\ \mathrm{Var}(X) = \lambda \end{array}}$$

$\Rightarrow$ prop. sur la loi de $X_1 + X_2$ pour $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ et X_1 et X_2 indépendantes (stabilité de la loi de Poisson par somme).

$\Rightarrow$ prop. sur l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson :

$$\boxed{\lim_n \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}} \tag{33}$$

pour une suite (p_n) à valeurs dans $[0,1]$ telle que $\lim_n np_n = \lambda$ (et pour tout $k \in \mathbb{N}$).

E.5 Loi multinomiale

★ *déf. d'une* ***épreuve multinomiale à m issues****,*
*déf. de l'****expérience aléatoire pour une loi multinomiale****,*
rem. sur l'espace probabilisé ($\Omega = \{S_1; \cdots ; S_m\}^n$).

★ *déf. d'une* ***loi multinomiale*** $\mathcal{M}(n, p_1, \cdots, p_m)$ *où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p_i \in]0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^m p_i = 1$.*

$\Rightarrow$ prop. sur une définition équivalente en caractérisant la loi

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 = k_1, \cdots, X_m = k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_m!}\, p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m} \times \delta_{k_1+\cdots+k_m, n}} \tag{34}$$

pour $k_i \in \{0, \ldots, n\}$ ($\delta_{j,j}$ est le symbole de Kronecker).

$\Rightarrow$ prop. sur l'espérance et la variance des X_i (avec $X = (X_1, \cdots, X_m) \sim \mathcal{M}(n, p_1, \cdots, p_m)$)

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{E}(X_i) = np_i \\ \mathrm{Var}(X_i) = np_i(1-p_i) \end{array}} \tag{35}$$

$\Rightarrow$ prop. sur la loi de $(X_1, \cdots, X_m)$ avec $X_i \sim \mathcal{B}(n, p_i)$ et les X_i indépendantes entre elles.

F Digression I - Séries de fonctions

En analyse à une variable réelle, une série de fonctions est une série dont le terme général est une suite de fonctions toutes définies sur un sous domaine de $\mathbb{R}$.

Déjà, concernant les séries numériques, il existe plusieurs types de convergence : la convergence simple et la convergence absolue. On parle aussi de série semi-convergente quand celle-ci converge simplement mais pas absolument.

Pour les séries de fonctions, sans rentrer dans des définitions de théorie de la mesure de plus haut niveau, on peut définir quatre type de convergence : la convergence simple, la convergence absolue, la convergence normale et la convergence uniforme.

Ces notions sont utiles dans le cadre de la théorie des probabilités, notamment pour l'utilisation des fonctions génératrices seront introduites dans un autre chapitre de ce cours ; les fonctions génératrices sont, en effet, des séries entières qui sont elles-même des séries de fonctions.

F.1 Convergence des séries numériques

★ *déf. de l'**ensemble** $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$,*
*déf. d'une **série de terme général** U_n **dans le corps** $\mathbb{K}$,*
not. $\sum U_n$ *ou* $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ *pour une série,*
*déf. de la **somme partielle de la série au rang** n.*

★ *déf. de la **convergence simple d'une série**,*
*déf. de la **somme de la série**,*
not. $\lim_n \sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=0}^{\infty} U_k$.

★ *déf. de la **convergence absolue d'une série**.*

⇒ prop. sur le lien entre convergence simple et convergence absolue.

⇒ th. :

$$\boxed{|\sum_{k=0}^{\infty} U_k| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |U_k|} \tag{36}$$

si cela à un sens.

$\Rightarrow$ prop. : test de D'ALEMBERT
prop. : test de GAUCHY.

★ *déf. d'une série semi-convergente.*

F.2 Convergence des séries de fonctions

★ *déf. d'une* ***série de fonctions*** $\sum f_n$ ***sur un intervalle*** I.

★ *déf. de la* ***convergence simple d'une série de fonctions sur un sous intervalle*** $J \subset I$,
déf. de la ***somme de la série*** $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

★ *déf. de la* ***convergence normale d'une série de fonctions****.*

$\Rightarrow$ prop. sur le lien entre convergence simple et convergence normale,
rem. sur l'hypothèse de convergence normale.

★ *déf. de la* ***convergence uniforme d'une série de fonctions****.*

$\Rightarrow$ prop. sur le lien entre convergence simple et convergence uniforme.

$\Rightarrow$ th. sur le lien entre convergence normale et convergence uniforme,
prop. sur une série de fonctions continues uniformément convergente sur un intervalle.

G Digression II - Séries entières

Les séries entières sont utilisées en théorie des probabilités en tant que fonctions génératrices (cf. chapitre suivant). Ce sont des séries de fonctions définies génériquement à valeurs dans $\mathbb{C}$ où le terme général est une suite de fonctions monômes de degrés croissants.

Les séries entières possèdent des propriétés associées à leur convergence remarquables ; on peut, en général, déterminer un rayon de convergence et donc, un disque du plan complexe où la série converge absolument.

Elles présentent aussi un lien étroit avec le développement limité d'une fonction (approximation polynomiale) par la formule de Taylor.

G.1 Séries entières et rayon de convergence

★ *déf. d'une* ***série entière****,*
not. $\sum a_n z^n$*,*
déf. des ***coefficients de la série entière****.*

★ *déf. du* ***rayon de convergence d'une série entière*** $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$.

★ *déf. d'une* ***série grossièrement divergente****.*

$\Rightarrow$ th. sur le rayon de convergence (et la convergence absolue de la série).

$\Rightarrow$ prop. : règle de Gauchy

$$\boxed{\frac{1}{R} = \lim_n |a_n|^{\frac{1}{n}}} \tag{37}$$

si cette limite existe (avec $R = 0$ si la limite est $+\infty$).

$\Rightarrow$ prop. : règle de D'Alembert

$$\boxed{\frac{1}{R} = \lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}|} \tag{38}$$

si cette limite existe (avec $R = 0$ si la limite est $+\infty$).

G.2 Limites supérieures et inférieures

★ *déf. des* ***limites supérieure et inférieure d'une suite bornée****,*
not. $\limsup_n U_n$ *et* $\liminf_n U_n$*,*
déf. des ***limites supérieure et inférieure d'une suite quelconque****.*

⇒ prop. sur le calcul du rayon de convergence d'une série entière : règle d'Hadamard

(39) $$\boxed{\frac{1}{R} = \limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

G.3 Séries entières réelles

★ *déf. d'une* ***série entière réelle****,*
not. $\sum a_n x^n$*.*

⇒ prop. sur la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum a_n x^n$ (par rapport au rayon de convergence),
prop. : corollaire sur la continuité de la somme de la série de fonctions sur $]-R, R[$.

⇒ th. sur la somme de la série de fonctions (classe C^∞) :

(40) $$\boxed{f^{(k)}(x) = \sum_{n \geqslant k} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}}$$

⇒ prop. sur l'égalité des coefficients de deux séries entières.

H Fonctions génératrices

La fonction génératrice de la loi d'une variable aléatoire est une série entière associé aux probabilités des différentes valeurs prises par la variable. Elle est utile car elle permet de caractériser entièrement la loi de la variable aléatoire.

On considère dans ce chapitre des lois discrètes et on supposera que les variables aléatoires sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.

H.1 Fonction génératrice de la loi d'une variable aléatoire

$\Longrightarrow$ prop. sur le rayon de convergence de la série entière (réelle) $\sum \mathbb{P}(X = n)s^n$.

$\bigstar$ *déf. de la **fonction génératrice de la loi d'une variable aléatoire** :*

(41) $$\boxed{g_X(s) = \mathbb{E}(s^X)}$$

définie pour $s \in [-1, 1]$.

H.2 Propriétés des fonctions génératrices

$\Longrightarrow$ prop. sur l'expression de la fonction génératrice

(42) $$\boxed{g_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)s^n}$$

$\Longrightarrow$ prop. : $g_X(1) = 1$,
prop. sur la classe de g_X sur $]-1, 1[$,
prop. sur la dérivée $k$ème de g_X prise en $s = 0$

(43) $$\boxed{g_X^{(k)}(0) = k!\,\mathbb{P}(X = k)}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$\Longrightarrow$ th. : identification des lois (par l'égalité des fonctions génératrices sur un intervalle $[0, \epsilon[$ avec $\epsilon > 0$).

$\Longrightarrow$ prop. sur la somme de variables aléatoires indépendantes

(44) $$\boxed{g_{X+Y} = g_X\, g_Y}$$

$\Longrightarrow$ prop. sur le calcul de l'espérance

(45) $$\boxed{\mathbb{E}(X) = g'_X(1)}$$

pour X variable aléatoire admettant une espérance.

$\Rightarrow$ prop. sur la calcul de la variance

$$\boxed{\mathrm{Var} X = g''_X(1) + g'_X(1) - g'_X(1)^2} \tag{46}$$

pour X variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

$\Rightarrow$ th. : obtention des moments

$$\boxed{g_X^{(k)}(1) = \mathbb{E}(X(X-1)\cdots(X-k+1))} \tag{47}$$

pour tout k entier tel que $0 < k \leqslant n$ (on suppose que le moment d'ordre n existe),
rem. sur l'existence des moments.

H.3 Fonctions génératrices des lois usuelles

$\Rightarrow$ prop. sur l'expression de la fonction génératrice d'une loi de Bernoulli

$$\boxed{g_X(s) = ps + (1-p)} \tag{48}$$

$\Rightarrow$ prop. sur l'expression de la fonction génératrice d'une loi binomiale

$$\boxed{g_X(s) = (ps + (1-p))^n} \tag{49}$$

$\Rightarrow$ prop. sur l'expression de la fonction génératrice d'une loi de Poisson

$$\boxed{g_X(s) = e^{\lambda(s-1)}} \tag{50}$$

$\Rightarrow$ prop. sur l'expression de la fonction génératrice d'une loi géométrique

$$\boxed{g_X(s) = \frac{ps}{1 - s(1-p)}} \tag{51}$$

I Lois à densité

Une variable aléatoire à densité, que l'on appellera par abus de langage loi à densité, est une variable aléatoire dont le support, c'est à dire, l'ensemble de ses valeurs possibles n'est ni fini, ni dénombrable ; dans ce cas, la probabilité d'appartenance à un sous domaine se calcule à l'aide d'une intégrale. Génériquement, on aura

$$\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

où f_X est dite fonction de densité de la variable aléatoire X.

Intuitivement, une fonction de densité peut être vue comme la limite d'un histogramme avec un grand nombre de classes très étroites.

On considère ici des variables aléatoires réelles.

I.1 Densité de la loi d'une variable aléatoire

★ *déf. de la* ***densité de la loi d'une variable aléatoire,***
déf d'une ***variable aléatoire à densité ou admettant une densité***

$$\boxed{\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f_X(t)dt} \tag{52}$$

pour tous a, $b \in \tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ *avec* $a \leqslant b$.

I.2 Propriétés des variables aléatoires à densité

⇒ prop. sur la positivité et l'intégrabilité de la fonction de densité,
prop. sur la condition de normalisation

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt = 1} \tag{53}$$

⇒ prop. : $\mathbb{P}(X = x) = 0$ pour tout x
prop. : conséquences,

th : identification des lois par l'égalité presque partout des densités,
prop. sur la densité de $\varphi(X)$ où φ est une fonction réelle C^1 et bijective

(54) $$\boxed{f_{\varphi(X)}(t) = \frac{f_X(\varphi^{-1}(t))}{|\varphi'(\varphi^{-1}(t))|}}$$

★ *déf. du* ***produit de convolution de deux fonctions réelles positives***

(55) $$\boxed{(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(t-u)\, du}$$

⟹ prop. sur la somme de deux variables aléatoires indépendantes

(56) $$\boxed{f_{X+Y} = f_X * f_Y}$$

I.3 Moment d'ordre n d'une variable aléatoire à densité

★ *déf. du* ***moment d'ordre*** n ***d'une variable aléatoire à densité***

(57) $$\boxed{\mathbb{E}(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f_X(t) dt}$$

★ *déf. de l'****espérance****,*
déf de la ***variance****.*

⟹ prop. : extension des propriétés de base sur l'espérance et la variance au cas continu,
prop. sur l'espérance de $\varphi(X)$:

(58) $$\boxed{\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f_X(t) dt}$$

où φ est une fonction réelle bornée.

J Fonctions de répartition

La fonction de densité d'une variable aléatoire continue s'identfie à la dérivée d'une autre fonction fondamentale en théorie des variables aléatoire appelée fonction de répartition.

Ceci-dit, au contraire de la fonction de densité, la fonction de répartition concerne aussi bien les lois continues que les lois discrètes.

La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

Cette fonction permet de caractériser la loi de probabilité de la variable aléatoire.

On étudiera dans ce chapitre des variables aléatoires réelles quelconques : les lois peuvent être discrètes ou bien à densité.

J.1 Fonction de répartition de la loi d'une variable aléatoire

★ *déf. de la* ***fonction de répartition de la loi d'une variable aléatoire réelle :***

(59) $$\boxed{F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t)}$$

J.2 Propriétés de la fonction de répartition

⇒ prop. : F_X croissante et continue à droite sur $\mathbb{R}$,
prop. : $0 \leqslant F_X(t) \leqslant 1$,
Prop. sur les limites de F_X en $\pm\infty$.

⇒ Prop sur l'expression de $\mathbb{P}(a < X \leqslant b)$

(60) $$\boxed{\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)}$$

$\Rightarrow$ prop. :

(61) $$\boxed{\mathbb{P}(X < t) = \lim_{t_0 \to t^-} F_X(t_0)}$$

rem. sur l'expression de $\mathbb{P}(X \in I)$ (où I intervalle).

$\Rightarrow$ th. : identification des lois (par égalité des fonctions de répartition).

J.3 Fonctions de répartition des lois à densité

$\Rightarrow$ prop. sur le lien entre fonction de répartition et fonction de densité

(62) $$\boxed{F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)du}$$

$\Rightarrow$ prop. sur la continuité de F_X.

$\Rightarrow$ prop. : F_X primitive de f_X presque partout (là où f_X est continue).

K Fonctions caractéristiques

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle X est une fonction qui permet de déterminer entièrement de manière unique sa loi de probabilité.

Les valeurs en zéro des dérivées successives de la fonction caractéristique donnent accès aux moments de la variable aléatoire.

Tout comme dans le chapitre précédent, on considère ici des variables aléatoires réelles quelconques (continues ou discrètes).

K.1 Fonction caractéristique de la loi d'une variable aléatoire

★ *déf. d'une **variable aléatoire complexe**,*
*déf. de l'**espérance d'une variable aléatoire complexe**.*

★ *déf. de la **fonction caractéristique de la loi d'une variable aléatoire réelle** :*

(63) $$\boxed{\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})}$$

K.2 Propriétés de la fonction caractéristique

$\Longrightarrow$ prop. sur la somme de deux variables aléatoires indépendantes

(64) $$\boxed{\varphi_{X+Y} = \varphi_X \, \varphi_Y}$$

$\Longrightarrow$ th. : identification des lois (par égalité des fonctions caractéristiques).

$\Longrightarrow$ prop. sur le lien entre fonction caractéristique et fonction génératrice

(65) $$\boxed{\varphi_X(x) = g_X(e^{ix})}$$

$\Longrightarrow$ prop. sur φ_X lorsque X admet un moment d'ordre n (classe C^n)

(66) $$\boxed{\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k \mathbb{E}(X^k)}{k!} \, t^k + o(t^n)}$$

c'est à dire, $\varphi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k)$

L Lois à densité classiques

On présente ici quelques une des lois à densité les plus couramment utilisées.

La loi uniforme est la loi la plus simple et représente l'équiprobabilité. Si une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$, sa densité de probabilité f_X est définie comme

$$f_X(t) = \frac{1}{b-a}$$

pour tout $t \in [a;b]$ et $f_X(t) = 0$ si $t \notin [a;b]$.

Une autre loi courante est la loi exponentielle ; elle est souvent utilisée pour modéliser des durées de vie. Sa densité de probabilité est donnée par

$$f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

pour tout $t \geqslant 0$ et avec λ un paramètre réel strictement positif. On a $f_X = 0$ sur $\mathbb{R}^{*-}$.

On présentera également la loi normale qui est utilisée pour modéliser de nombreux phénomènes en sciences et aussi utilisé en analyse de données. Sa fonction de densité est définie par :

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{67}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, μ et σ étant respectivement son espérance et son écart type.

L.1 Loi uniforme

★ *déf. de la* ***loi uniforme continue*** $\mathcal{U}_{[a;b]}$ *où* $a < b$ *:*

$$\boxed{f_X = \frac{1}{b-a}\mathbb{I}_{[a;b]}} \tag{68}$$

⇒ prop. sur l'expression de l'espérance et de la variance

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{a+b}{2} \\ \mathrm{Var}(X) &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}} \tag{69}$$

$\Rightarrow$ prop. sur l'expression de la fonction de répartition

(70) $$\boxed{F_X(t) = \frac{t-a}{b-a}}$$

pour t compris entre a et b. On a $F_X(t) = 0$ pour $t < a$ et $F_X(t) = 1$ pour $t > b$.

$\Rightarrow$ prop. sur l'expression de la fonction caractéristique

(71) $$\boxed{\varphi_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}}$$

$\Rightarrow$ th. de la réciproque.

L.2 Loi exponentielle

★ *déf de la* ***loi exponentielle*** $\mathcal{E}(\lambda)$ *où* $\lambda > 0$ *:*

(72) $$\boxed{f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}\, \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)}$$

$\Rightarrow$ prop. sur $\min(X, Y)$ où X et Y sont des variables aléatoires indépendantes suivant des lois exponentielles.

$\Rightarrow$ prop. sur l'expression de l'espérance et de la variance

(73) $$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{E}(X) = 1/\lambda \\ \mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2 \end{array}}$$

$\Rightarrow$ prop. sur l'expression de la fonction de répartition

(74) $$\boxed{F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}}$$

pour t positif. On a $F_X(t) = 0$ pour $t < 0$.

$\Longrightarrow$ Proposition sur l'expression de la fonction caractéristique

(75)
$$\boxed{\varphi_X(t) = \frac{1}{1 - it/\lambda}}$$

L.3 Loi normale

★ *déf. de la* ***loi normale*** $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *avec* $\mu \in \mathbb{R}$ *et* $\sigma^2 > 0$ *:*

(76)
$$\boxed{f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

★ *déf. de la* ***loi normale centrée réduite*** *($\mathcal{N}(0,1)$).*

$\Longrightarrow$ Prop. sur l'expression de l'espérance et de la variance

(77)
$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbb{E}(X) = \mu \\ \mathrm{Var}(X) = \sigma^2\end{array}}$$

$\Longrightarrow$ prop. sur la variable aléatoire $\frac{X-\mu}{\sigma}$ où $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

$\Longrightarrow$ prop. sur la stabilité de la loi normale par somme (pour deux variables aléatoires indépendantes).

$\Longrightarrow$ prop. sur l'expression de la fonction de répartition

(78)
$$\boxed{F_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du}$$

rem. sur la fonction erreur.

$\Longrightarrow$ prop. sur l'expression de la fonction caractéristique

(79)
$$\boxed{\varphi_X(t) = e^{i\mu t - \sigma^2 t^2/2}}$$

M Convergence des suites de variables aléatoires

Il existe différents concepts de convergence concernant les suites de variables aléatoires. On présente et distingue ici la convergence en probabilité et la convergence en loi.

La convergence en probabilité est plus forte que la convergence en loi dans la sens où la première implique la seconde.

Ce cours se termine par certains grands théorèmes associés à la convergence tels que la loi faible des grands nombres ou le théorème centrale-limite.

M.1 Convergence en probabilité et convergence en loi

★ *déf. de la convergence en probabilité :*

(80) $$\boxed{\lim_n \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0}$$

pour tout $\epsilon > 0$.

★ *déf. de la convergence en loi :*

(81) $$\boxed{\lim_n F_{X_n}(t) = F_X(t)}$$

partout où F_X est continue.

⇒ th. de continuité de Levy (sur la fonction caractéristique) :

(82) $$\boxed{\lim_n \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

⇒ prop. sur le lien entre convergence en probabilité et convergence en loi.

M.2 Théorèmes sur la convergence

⇒ prop. pour une suite de variables aléatoires telle que $\lim_n \mathbb{E}(X_n) = c \in \mathbb{R}$ et $\lim_n \mathrm{Var}(X_n) = 0$ (alors (X_n) converge evrs c en probabilité).

⇒ th. sur une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de variables aléatoires converge en loi

$$\boxed{\lim_n \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))} \tag{83}$$

pour toute fonction continue f telle qu'il existe $M > 0$ vérifiant $|f(X_n)| < M$ (pour tout n) et $|f(X)| < M$.

⇒ th. : loi faible des grands nombres.

⇒ th. : centrale limite.