

### Limites de fonctions et asymptotes

#### ★ Exercice 1

Calculer les limites des fonctions indiquées ci-dessous et préciser les éventuelles asymptotes à leurs courbes.

$$f_1 : x \mapsto x^4 - x^3 + 3x^2 - 2 \quad \text{en } \pm \infty$$

$$f_2 : x \mapsto 1 + \frac{2}{x-3} \quad \text{en } \pm \infty \text{ et } 3^\pm$$

$$f_3 : x \mapsto 3x - 5 + \frac{2}{x+2} \quad \text{en } \pm \infty \text{ et } -2^\pm$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{2x^2}{(x-1)(2-x)} \quad \text{en } \pm \infty, 1^\pm \text{ et } 2^\pm$$

$$f_5 : x \mapsto 3 - \frac{x+1}{1-x} \quad \text{en } \pm \infty \text{ et } 1^\pm$$

#### ★ Exercice 2

Soit la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{1 - x}$$

1. Justifier que l'ensemble de définition de  $f$  est

$$D_f = ] - \infty; 1[ \cup ] 1; +\infty[$$

2. Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$ ,  $+\infty$ ,  $1^+$  et  $1^-$ . Préciser les éventuelles asymptotes à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

#### ★ Exercice 3

Soit la fonction  $g$  définie par

$$g(x) = \frac{2x}{(x+4)^2}$$

1. Justifier que l'ensemble de définition de  $g$  est

$$D_g = ] - \infty; -4[ \cup ] -4; +\infty[$$

2. Calculer les limites de  $g$  en  $-\infty$ ,  $+\infty$ ,  $-4^+$  et  $-4^-$ . Préciser les éventuelles asymptotes à la courbe  $\mathcal{C}_g$ .

★ **Exercice 4**

Soit la fonction  $h$  définie par

$$h(x) = \frac{2-x}{(2x+4)(5-x)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition  $D_h$  de cette fonction.
2. Calculer les limites en toutes les bornes de l'ensemble de définition  $D_h$ . Préciser les éventuelles asymptotes à la courbe.

★ **Exercice 5**    *Calculs de limites avec des racines carrées*

Calculer les limites suivantes.

1.  $\lim_{+\infty} f$  pour

$$f(x) = x - \sqrt{x}$$

2.  $\lim_{+\infty} g$  pour

$$g(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + 1}$$

3.  $\lim_{+\infty} h$  et  $\lim_{0^+} h$  pour

$$h(x) = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$$

4.  $\lim_{1^-} k$  pour

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

5.  $\lim_{-\infty} l$  pour

$$l(x) = \sqrt{-x^3 + x^2 + x}$$

6.  $\lim_{5^+} m$  pour

$$m(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$$

7.  $\lim_{-\infty} n$  pour

$$n(x) = \sqrt{\frac{-x+1}{x^2+1}}$$

8.  $\lim_{-\infty} p$  et  $\lim_{-2^-} p$  pour

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$$

★ **Exercice 6**    *Étude d'une asymptote oblique*

Soit la fonction  $h$  définie sur  $] -\infty; 3[ \cup ]3; +\infty[$  par

$$h(x) = \frac{2x^2 - 5x - 2}{x - 3}$$

1. Étudier les limites de  $h$  en  $3^+$  et  $3^-$ . Que peut-on en déduire pour la courbe  $\mathcal{C}_h$  ?
2. Étudier les limites de  $h$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
3. Tracer la courbe  $\mathcal{C}_h$ .
4. Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que

$$h(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3}$$

5. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - (ax + b)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) - (ax + b)$$

Interpréter graphiquement ce résultat.

★ **Exercice 7**    *Méthode de l'expression conjuguée*

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$$

1. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
2. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$f(x) = \frac{-1}{x - \sqrt{1 + x^2}}$$

3. Calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .