

Questions avancées sur les limites de fonctions

★ **Exercice 1** *Fonction partie entière*

Pour un réel quelconque x , on définit sa partie entière comme le plus grand entier inférieur ou égal à x . On la note $E(x)$. Par exemple, $E(3,1) = 3 = E(\pi)$ et $E(-4,2) = -5$.

Soit la fonction l définie sur \mathbb{R}^* par

$$l(x) = \frac{E(x)}{x}$$

Démontrer que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe \mathcal{C}_l au voisinage de $+\infty$.

★ **Exercice 2**

Soient a , b et c trois réels et soit la fonction f définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{ax^2 + 2x - 5}{x^2 + bx + c}$$

1. Déterminer a , b et c tels que \mathcal{C}_f admette pour asymptotes les droites d'équation $y = -2$, $x = 1$ et $x = -4$.
2. Déterminer a , b et c tels que \mathcal{C}_f admette pour seules asymptotes les droites d'équation $y = 3$ et $x = -2$, et que le trinôme du dénominateur de $f(x)$ n'ait pas de racine double.

★ **Exercice 3**

Calculer

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin(x) - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$$

★ **Exercice 4**

1. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sin x}{x}$$

2. En déduire

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x^2}$$

3. En déduire

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(5x)}{x}$$

4. En déduire

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(5x)}{\sin(3x)}$$

★ **Exercice 5** *Étude de fonction autour d'une asymptote oblique*

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{1 - x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f
2. Calculer les limites de f aux bornes du domaine D_f .
3. Justifier que f est dérivable sur son domaine et calculer $f'(x)$
4. Dresser le tableau de variation complet de f .
5. Déterminer l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f en -1 .
6. Déterminer la position relative de cette tangente avec la courbe \mathcal{C}_f .
7. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{1 - x}$$

8. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b))$$

9. En déduire l'allure de la courbe \mathcal{C}_f au voisinage de l'infini.
10. Tracer la courbe \mathcal{C}_f