Compléments de dérivabilité II

⋆ **Exercice 1**

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{x+1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{*+} =]0;+\infty[$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$.
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^{*+}$.
4. En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}^{*+}$.

⋆ **Exercice 2**

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$$

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $\sqrt{1+x^2}\, f'(x) - f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Justifier que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. Montrer que $(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

⋆ **Exercice 3**

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = x + 1 + x\,e^{-x}$$

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Justifier que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. En déduire les variations de f' sur $\mathbb{R}$.
5. En déduire que f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
6. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
7. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite $(d) : y = x + 1$.
8. Déterminer un réel a tel que la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a soit parallèle à la droite (d).