Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

⋆ Exercice 1

Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = xe^{-x} + 1$$

1. Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire le tableau de variation complet de h sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution δ sur $\mathbb{R}$.
4. Encadrer δ à 10^{-3} près.

⋆ Exercice 2

Étudier le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation ci-dessous.

$$-x^3 + 3x + 1 = 0$$

⋆ Exercice 3

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $]-\infty; 4]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur $[0; 4]$ et encadrer cette solution à 10^{-2} près.
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 10$ sur $\mathbb{R}$ et encadrer ces solutions à 10^{-2} près.

⋆ Exercice 4

Étudier le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ des équations ci-dessous et encadrer ces solutions à 10^{-2} près.

$$x^3 - 2x^2 + x = 1$$

et

$$x^3 - 2x^2 + x = 0,1$$

⋆ **Exercice 5**

Étudier le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ des équations

$$x^5 + 3x^3 - 6 = 0$$

et

$$x^4 + x^2 = 1$$

⋆ **Exercice 6**

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = (3e^x - 4)e^{3x}$$

1. Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}$.
2. Discuter le nombre de solutions de l'équation $h(x) = k$ selon les valeurs de $k \in \mathbb{Z}$.