Feuille 21 - Terminale spécialité mathématiques

Continuité et théorème du point fixe

⋆ **Exercice 1**

Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$V_0 = 2 \text{ et } V_{n+1} = \sqrt{7V_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Démontrer par récurrence que $0 \leqslant V_n \leqslant 7$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que (V_n) est croissante.
3. En déduire que (V_n) converge.
4. On note l la limite de (V_n). Pourquoi peut-on affirmer que $l = \sqrt{7l}$?
5. Calculer l.

⋆ **Exercice 2**

Soit la fonction f définie pour tout $x > 0$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\big(x + \frac{5}{x}\big)$$

et soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$U_0 = 1 \text{ et } U_{n+1} = f(U_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^{*+}$.
2. Démontrer que (U_n) est minorée et décroissante à partir du rang $n = 1$.
3. En déduire que (U_n) converge.
4. Déterminer $\lim U_n$.