Premiers éléments de cinématique

Ce cours constitue une introduction à la cinématique, sous domaine de la mécanique newtonienne.

Les trois sections principales sont de niveau terminale spécialité physique-chimie et ce cours fait suite à plusieurs enseignements en cours privés et en classes portant sur la mécanique que j'ai donnés durant ces dernières années.

Certains résultats sont admis en classe de terminale et leurs démonstrations qui nécessitent un niveau plus élevé seront faites dans le cadre d'un cours ultérieur ; il abordera certaines ouvertures et des notions plus avancées.

Maxime Baczyk

Table des matières

La mécanique est l'étude du mouvement des corps ainsi que de leurs déformations en relation avec les causes qui ont généré ce mouvement, c'est à dire, les forces. La cinématique représente un sous domaine de la mécanique et consiste à étudier uniquement le mouvement des systèmes, sans s'intéresser aux forces qui ont induit celui-ci.

Après avoir introduit les hypothèses élémentaires et les outils nécessaires à l'étude cinématique, on discute la nature du mouvement en s'intéressant à quelques types de mouvement simples.

A Hypothèses générales

On donne ici des principes généraux utilisés en mécanique newtonienne sur l'influence de l'observateur, la nature du temps et celle de l'espace physique à trois dimensions.

On admet tout d'abord que la présence de l'observateur décrivant le mouvement au cours du temps ne modifie ni les causes ni leurs effets.

L'espace physique tridimensionnel est considéré comme homogène, euclidien et isotrope. L'homogénéité et l'isotropie de l'espace signifient que toutes les positions et toutes les directions y sont équivalentes. On dit aussi que l'espace est euclidien car il est sans courbure ; autrement dit, la distance la plus courte entre deux points y est une droite.[i]

Concernant l'aspect temporel, on considère que les lois physiques sont invariantes par translation dans le temps. C'est le principe d'invariance. De plus, en mécanique non relativiste comme il est question dans ce cours, on fait l'hypothèse que le temps est absolu ou universel. Ceci signifie que ce dernier est le même partout ; il s'écoule de la même manière et sa mesure donne la même valeur quels que soient l'observateur, sa position ou sa vitesse.

Il faut choisir une origine au temps correspondant à l'instant $t = 0$ et celui-ci s'écoule toujours dans le même sens.[ii]

B Position, vitesse et accélération

Les outils élémentaires permettant d'étudier la cinématique des corps sont introduits dans cette section. On discute notamment l'approximation du point

[i] Un contre exemple est une sphère qui est un espace courbé de dimension 2 ; sur cette surface, la distance la plus courte entre deux points n'est pas une droite.

[ii] Au contraire des dimensions spatiales où le déplacement y est libre, l'observateur est lié dans le temps (dimension temporelle).

matériel et l'on s'intéresse ici uniquement à la cinématique du point.

B.1 Référentiels

Le mouvement est toujours étudié par rapport à un référentiel : ce dernier est constitué d'un repère $\mathcal{R}$ lié à l'observateur et d'une horloge.

Le repère, qui sert à décrire la position, est lui-même composé d'un point O de l'espace et de trois vecteurs aux propriétés particulières. Par exemple, le plus couramment, ces vecteurs sont orthonormés : ils sont alors tous perpendiculaires deux à deux et de norme unité. En notant $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ces trois vecteurs, on a donc

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \tag{1}$$

et

$$\vec{i} \perp \vec{j},\ \vec{i} \perp \vec{k} \text{ et } \vec{j} \perp \vec{k} \tag{2}$$

On dit que le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ forme une base orthonormée de l'espace.[iii]

Le repère s'écrit

$$\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \tag{3}$$

et le point O est appelé origine du repère.

L'horloge sert quant-à elle à mesurer le temps.

L'universalité du temps en mécanique newtonienne signifie que si l'on change de référentiel, en notant t et t' les temps mesurés les deux référentiels, on a toujours l'égalité[iv]

$$t = t' \tag{4}$$

Cette relation n'est plus valable en mécanique relativiste où le temps se dilate lorsqu'un référentiel possède une très grande vitesse par rapport à un autre.[v] Ce cours ne traite pas de la relativité restreinte mais, pour en dire quelques mots, celle-ci vient corriger la mécanique de Newton lorsque la vitesse des corps considérés est très élevée et proche de celle de la lumière dans le vide.[vi] Évidem-

[iii] Une base de l'espace est, d'une façon générale, une famille de trois vecteurs non coplanaires.

[iv] On a toujours $t = t'$ dans la transformation dite de Galilée qui décrit un changement de référentiels.

[v] La transformation décrivant un changement de référentiel, non plus en mécanique newtonienne mais en relativité restreinte, s'appelle une transformation de Lorentz.

[vi] On la note couramment c et

$$c = 299792458\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

On se rappelle d'une valeur approchée de cette dernière : elle vaut à peu près trois cents mille kilomètres par seconde. La lumière parcourt ainsi plus de sept fois le tour de la terre en une seconde.

ment, à faible vitesse, la relativité restreinte retombe sur les lois de la mécanique newtonienne.[vii]

Il est important de noter qu'un mouvement est toujours décrit par rapport à un référentiel donné et dépend fortement de ce dernier ; c'est ce que l'on appelle couramment la relativité du mouvement. Par exemple, lorsqu'une voiture roule sur la route, le conducteur est immobile dans son référentiel propre, c'est à dire, qui lui est lié. A contrario, dans le référentiel terrestre fixé au bord de la route, le conducteur présente un mouvement. De la même manière, il est évident que sur un vélo en mouvement, la trajectoire d'un point de sa roue va dépendre du référentiel d'étude et où est lié ce dernier.

B.2 Modèle du point matériel

En mécanique du point, la taille des objets dont on étudie le mouvement est considérée comme négligeable par rapports aux distances de leurs déplacements. On fait, dans ce cas, l'approximation que le corps étudié est une masse ponctuelle. On parle alors de point matériel.

Dans l'approximation du point matériel et dans le cas d'un corps massif étendu dans l'espace, on pourra faire coïncider le point matériel avec le centre de gravité du corps.[viii]

B.3 Position

La trajectoire du point matériel est l'ensemble des positions successives, notées $M(t)$, qu'il occupe au cours du temps. C'est donc une courbe dans l'espace tridimensionnel.

On définit le vecteur position dans le repère $\mathcal{R}$: il relie l'origine du repère à la position à l'instant t, c'est à dire, au point $M(t)$. On notera $\vec{r}(t)$ ce vecteur qui s'écrit donc

$$\boxed{\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)} \tag{5}$$

et sa décomposition sur la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ s'exprime donc par

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k} \tag{6}$$

où $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont les coordonnées cartésiennes du point matériel $M(t)$. Leur unité dans le système international SI est le mètre. les coordonnées x, y

[vii] Il existe également une autre mécanique qui vient rectifier celle de Newton, cette fois-ci lorsque les distances sont très petites. C'est la mécanique quantique régissant le monde microscopique.

[viii] Le centre de gravité est le point d'application de la résultante des forces de pesanteur. Lorsque le champ de pesanteur est uniforme comme c'est le cas couramment, le centre de gravité est identique au centre d'inertie du corps : c'est le barycentre des masses. Le barycentre est la moyenne des positions pondérée par les masses de chaque point.

et z sont respectivement appelés abscisse, ordonnée et cote du point M. Leurs expressions en fonction du temps sont dites équations horaires du mouvement.

On peut aussi écrire les vecteurs en colonne dans une base donnée, ici $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Avec ce système de notations, l'Eq. (6) peut se ré-écrire

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \tag{7}$$

La base dans laquelle est décomposé le vecteur est précisée en indice de la colonne.

B.4 Vitesse instantanée

La vitesse décrit la variation de la position par rapport au temps.

On définit tout d'abord la vitesse vectorielle moyenne entre deux instants t et $t' > t$ comme suit

$$\vec{v}_{\text{moy}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{8}$$

avec

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t') - \vec{r}(t) \quad \text{et} \quad \Delta t = t' - t \tag{9}$$

On utilise plus souvent en cinématique le vecteur vitesse instantanée à l'instant t. Il s'identifie à la vitesse moyenne dans la limite où l'écart temporel Δt tend vers 0.

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \tag{10}$$

On reconnait dans cette expression la définition de la dérivée d'une fonction. On peut donc en effet écrire

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}} \tag{11}$$

d/dt désigne l'opérateur de dérivation par rapport au temps.

On pourra également noter un point au dessus des grandeurs physiques, des vecteurs ou des composantes de vecteurs pour désigner la dérivée par rapport au temps : pour une grandeur physique quelconque $u(t)$ dépendant du temps, on dénote

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} \tag{12}$$

Avec cette nouvelle notation, on a ainsi

$$\boxed{\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}} \tag{13}$$

Et dans la base cartésienne $\mathcal{B} = (\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, il vient

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j} + \dot{z}(t)\,\vec{k} \tag{14}$$

puisque le repère est supposé fixe. En effet, les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des constantes dans le temps ; ils ne varient pas.

On note au passage que les constantes au cours du temps sont appelées constantes du mouvement.[ix]

On peut déduire de l'équation (14) que le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire et dirigé dans le sens du mouvement. Ses composantes $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ dans la base $\mathcal{B}$ s'expriment en m.s^{-1}.

Il est aussi utile de définir la valeur non vectorielle de la vitesse instantanée $v(t)$. C'est celle-ci qui est mesurée expérimentalement. Elle s'exprime comme la norme du vecteur $\vec{v}$.

$$v(t) = \|\vec{v}(t)\| \tag{15}$$

Son unité dans le système international SI est aussi le m.s^{-1}.

Il est, dès lors, possible d'introduire une notion de dynamique très fondamentale en physique : la quantité de mouvement d'une particule. En mécanique non relativiste, elle s'identifie simplement au produit de sa masse par sa vitesse.

$$\boxed{\vec{p} = m\,\vec{v}} \tag{16}$$

La quantité de mouvement se mesure en kg.m.s^{-1}.[x]

B.5 Accélération instantanée

L'accélération décrit quant-à elle la variation de la vitesse par rapport au temps.

L'accélération moyenne entre deux instants s'exprime par

$$\vec{a}_{\text{moy}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{17}$$

[ix] Pour un vecteur $\vec{u}$ constant dans le temps, il vient

$$\dot{\vec{u}} = \vec{0}$$

[x] On parle aussi d'impulsion ou de moment conjugué à la position pour $\vec{p}$ en physique théorique. C'est une notion très fondamentale qui est utilisée de manière duale à la position en mécanique analytique hamiltonienne et en mécanique quantique également. Dans ces formalismes, les variables sont la position et l'impulsion.

avec

$$\Delta v = \vec{v}(t') - \vec{v}(t) \tag{18}$$

et $\Delta t = t' - t$ comme précédemment.

Le vecteur accélération instantanée s'obtient à la limite où Δt tend vers 0.

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}} \tag{19}$$

On notera $a(t)$ sa norme, c'est à dire la valeur de l'accélération. Elle se mesure en m.s^{-2}.

On souligne que l'accélération s'exprime donc par une dérivée seconde de la position.

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}} \tag{20}$$

d^2/dt^2 désigne l'opérateur de dérivée seconde par rapport au temps : il dérive deux fois d'affilée la fonction du temps considérée. On a ainsi

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k} \tag{21}$$

Ce qui peut se ré-écrire comme

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \tag{22}$$

Les composantes de l'accélération dans la base $\mathcal{B}$ sont les dérivées secondes par rapport au temps $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ et $\ddot{z}$.

C Nature du mouvement

On discute des mouvements simples comme le mouvement rectiligne et le mouvement circulaire. On introduit notamment la base mobile de Frenet qui permet de simplifier l'étude lorsque la trajectoire est courbée.

C.1 Caractérisation du mouvement

On parle de mouvement uniforme lorsque la valeur de la vitesse instantanée v, c'est à dire, la norme de $\vec{v}$ est une constante du mouvement.

Lors d'un mouvement uniforme, $v = \|\vec{v}\|$ est constant, ainsi

$$\frac{d}{dt}\|\vec{v}\|^2 = 0 \tag{23}$$

Ce qui se réécrit

$$\frac{d}{dt}\,\vec{v}\cdot\vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,\vec{a}\cdot\vec{v} = 0 \tag{24}$$

où l'on a utilisé la formule de dérivation d'un produit de fonctions et les propriétés du produit scalaire. En conclusion, lors d'un mouvement uniforme, le vecteur vitesse est toujours orthogonal[xi] au vecteur accélération.

Le mouvement sera dit accéléré si la fonction du temps v est croissante et décéléré pour v décroissante.

On utilise aussi le terme de mouvement varié uniformément lorsque c'est le vecteur accélération $\vec{a}$ qui est une constante du mouvement. On note que si $\vec{a}$ est une constante non nulle, ce mouvement n'est pas uniforme. Dans ce cas, il n'est pas difficile de montrer que les coordonnées de la vitesse sont des fonctions affines du temps et que les coordonnées cartésiennes du point matériel sont quant-à elles des fonctions polynômiale du second degré du temps.

En effet, à l'aide des deux prochains chapitres, on pourra montrer que pour une mouvement uniformément varié avec une accélération $\vec{a}$ constante, on obtient pour un mouvement unidimensionnel

$$v(t) = at + v_0 \tag{25}$$

et

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + x_0 \tag{26}$$

où $v_0 = v(t=0)$ et $x_0 = x(t=0)$ sont les vitesse et position initiales.

On dit que le mouvement est rectiligne, circulaire ou parabolique lorsque la trajectoire est respectivement une droite, un cercle ou une parabole. Si la trajectoire est une courbe quelconque, on parlera de mouvement curviligne.

Concernant le mouvement circulaire uniforme, on va retrouver grâce à d'autres arguments le résultat établi plus haut : l'orthogonalité entre $\vec{v}$ et $\vec{a}$.

C.2 Mouvement rectiligne

Un mouvement rectiligne correspond à une trajectoire droite. Ainsi, la direction et le sens de $\vec{v}$ sont constants. On note cependant que ce mouvement n'est pas

[xi] Deux vecteurs sont dits orthogonaux lorsque leurs directions sont perpendiculaires.

nécessairement uniforme ni uniformément varié.

Si le mouvement rectiligne est en plus uniforme, la norme du vecteur vitesse est également une constante du mouvement ; puisque la direction, le sens et la norme de $\vec{v}$ sont constants dans ce cas, le vecteur $\vec{v}$ est lui-même une constante du mouvement. Sa dérivée par rapport au temps $\vec{a}$ s'identifie donc au vecteur nul.

$$\vec{a} = \vec{0} \tag{27}$$

C.3 Base de Frenet

Lorsque l'on étudie des trajectoires courbées, comme pour l'exemple usuel du mouvement circulaire, il est utile d'introduire un repère mobile appelé repère de Frenet. Celui-ci est dit mobile car son origine est le point matériel lui-même ; le repère se déplace donc dans le temps avec le point matériel.

On présente ici le repère de Frenet pour une trajectoire plane, c'est à dire, pour un mouvement contenu dans un plan.

La base de Frenet est alors constituée de deux vecteurs orthogonaux et unitaires que l'on notera $\vec{e}_T$ et $\vec{e}_N$. Le vecteur $\vec{e}_T$ est tangent à la trajectoire et dans le sens du mouvement ; il est donc proportionnel à la vitesse et, puisque celui-ci est unitaire, on a

$$\vec{e}_T = \frac{\vec{v}}{v} \tag{28}$$

où $v = \|\vec{v}\|$ est la valeur de la vitesse instantanée. Le second vecteur $\vec{e}_N$ est, quant-à lui, orthogonal à $\vec{e}_N$ et orienté vers le centre de courbure de la trajectoire.

L'égalité de l'Eq. (28) peut se ré-écrire autrement ; elle donne directement l'expression de la vitesse dans la base de Frenet :

$$\boxed{\vec{v} = v\,\vec{e}_T} \tag{29}$$

On peut également démontrer l'expression générale de l'accélération pour un mouvement plan (cf. cours ultérieur). On a

$$\boxed{\vec{a} = \dot{v}\,\vec{e}_T + \frac{v^2}{\rho}\,\vec{e}_N} \tag{30}$$

où ρ est le rayon de courbure de la trajectoire.[xii]

[xii] Dans le cas d'une trajectoire circulaire, le rayon de courbure s'identifie simplement au rayon du cercle décrit par la particule. Dans un cadre plus général d'une trajectoire curviligne, le rayon de courbure peut être calculer en tout point ; C'est, cependant, un calcul assez complexe qui s'inscrit dans le champ de l'étude des courbes paramétrées en mathématiques.

C.4 Mouvement circulaire

On s'intéresse d'abord au mouvement circulaire uniforme. Dans ce cas, la norme du vecteur vitesse est constante mais celui-ci varie en direction au cours du temps. L'équation précédente donnant la forme de l'accélération dans la base de Frenet se ré-écrit comme

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\,\vec{e}_N \tag{31}$$

où R est le rayon du cercle décrit par la trajectoire ($R = \rho$ dans l'Eq. (30)). Ainsi, $\vec{a}$ est perpendiculaire au vecteur vitesse et dirigée vers le centre du cercle : on parle alors d'accélération centripète. La valeur de l'accélération est une constante du mouvement proportionnelle au carré de la vitesse :

$$\boxed{a = \frac{v^2}{R}} \tag{32}$$

Un autre exemple de mouvement est le mouvement circulaire non uniforme. Dans ce cas, la trajectoire est un cercle mais la valeur de l'accélération a n'est pas constante au cours du temps. Comme le montre l'Eq. (30), le vecteur accélération n'est plus dirigé vers le centre du cercle mais a également une composante tangentielle proportionnelle à $\dot{v}$.

I Exercices d'application

Exercice 1 :

Une voiture roule à la vitesse constante de 20 m/s. Après combien de temps a-t-elle parcouru 50 km ? Quelle distance parcourt-elle en 10 minutes ?

Exercice 2 :

La ligne de chemin de fer qui relie la gare X à la gare Y mesure 200 km et est en ligne droite. Un train A quitte la gare X à 10h à la vitesse moyenne de 120 km/h. Un train B quitte la gare Y à la même heure à la vitesse moyenne de 130 km/h en direction de la gare X. Quels sont l'heure et le lieu de rencontre des deux trains ?

Exercice 3 :

Pour traverser un fleuve de 100 m de large, on utilise une barque animée d'une vitesse de 50 m/min et dirigée perpendiculairement au courant parallèle aux rives dont la vitesse est de 20 m/min. Combien de temps faut-il à la barque pour traverser le fleuve ? Quelle distance a-t- elle parcouru ?

Exercice 4 :

Une automobile roule à la vitesse de 36 km/h. Elle accélère de manière à atteindre 72 km/h après 20 secondes. Quelle est son accélération moyenne ?

Exercice 5 :

Une voiture roulant à 108 km/h s'arrête sur une distance de 100 m. Quelle est la valeur de sa décélération ? Combien de temps lui faut-il pour s'arrêter ?

Exercice 6 :

Un automobiliste roulant à 72 km/h voit un obstacle. Après un temps de réaction de 0,5 seconde, il commence à freiner avec une décélération de 5 m/s^2. Quelle sera la distance parcourue par la voiture entre le moment où l'obstacle est repéré et l'arrêt de la voiture ?