

## MOUVEMENT DANS UN CHAMP

*Ce chapitre fait suite aux deux premiers éléments de cours intitulés "premiers éléments de cinématique" et "bases de la dynamique newtonienne".*

*Il constitue une introduction au mouvement des particules dans un champ uniforme ainsi qu'au mouvement des corps massifs dans un champ de gravitation, tout en se basant sur le programme de terminale option physique-chimie.*

*Les démonstrations plus difficiles ne sont pas écrites ; celles-ci ainsi que quelques compléments seront abordés dans un cours annexe.*

*Maxime Baczyk*

---

### Table des matières

<b>A Mouvement dans un champ uniforme</b>	<b>2</b>
A.1 Chute libre . . . . .	2
A.2 Accélération par un champ électrique . . . . .	6
<b>B Mouvement dans un champ de gravitation</b>	<b>7</b>
B.1 Approximation de l'orbite circulaire . . . . .	7
B.2 Lois de Kepler . . . . .	9
<b>I Exercices d'application</b>	<b>12</b>
I.1 Applications simples . . . . .	12
I.2 Problèmes . . . . .	13

---

Les champs créés par les masses et les charges électriques modifient les propriétés de l'espace physique et agissent sur les autres corps à travers les forces gravitationnelles ou électromagnétiques.

L'étude du mouvement dans un champ uniforme dans l'espace et constant dans le temps est relativement simple. Cette situation présente, de plus, des applications physique importantes comme la chute libre ou l'accélération des particules chargées à l'intérieur d'un condensateur.

Un autre exemple très classique en physique correspond à celui d'un satellite massif baignant dans le champ de gravitation généré par une grande masse centrale. Le satellite est alors en orbite en raison de la force centrale associée au champ de gravitation.

Les caractéristiques du mouvement en champ uniforme ainsi que dans un champ de gravitation sont abordées dans ce cours.

## A Mouvement dans un champ uniforme

On étudie, dans un premier temps, le cas de la chute libre où le corps n'est soumis qu'à son poids. On s'intéresse ensuite au mouvement des charges dans un champ électrique uniforme.

### A.1 Chute libre

On parle de chute libre lorsqu'on considère qu'un corps n'est soumis qu'à son poids ; on néglige alors les frottements ainsi que la poussée d'Archimède de l'air sur le corps.

Dans l'approximation du point matériel et en supposant le système fermé, c'est à dire, n'échangeant pas de matière avec l'extérieur et donc de masse constante, le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$(1) \quad \boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

où  $\vec{g}$  est la champ de pesanteur introduit dans le chapitre précédent. Ainsi, le mouvement est uniformément varié.<sup>i</sup>

On choisira le repère tel que

$$(2) \quad \vec{g} = -g \vec{k}$$

$g$  étant l'intensité du champ de pesanteur terrestre :  $g \simeq 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ . Ce choix pour les axes<sup>ii</sup> du repère d'étude est toujours possible et simplifie le calcul des équations du mouvement. Les coordonnées  $x$  et  $y$  correspondent alors à l'abscisse et l'ordonnée tandis que  $z$  désigne la cote (ou l'altitude). Le signe –

---

<sup>i</sup>La mouvement uniformément varié a été brièvement discuté dans le cours de cinématique. Il correspond à un vecteur accélération constant et, comme nous allons le voir ici, la vitesse et la position sont respectivement des fonctions affines et polynomiales du second degré du temps.

<sup>ii</sup>La base du repère est  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et les axes sont les droites dirigés par ces trois vecteurs et passant par l'origine  $O$ .

dans l'expression ci-dessus vient du fait que le champ de pesanteur  $\vec{g}$  est dirigé vers le bas selon l'axe ( $Oz$ ) alors que le sens de  $\vec{k}$  est vers le haut.

En adoptant une écriture en vecteurs colonnes, l'accélération prend donc la forme

$$(3) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

dans la base  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . Il est alors aisé d'établir l'expression du vecteur vitesse instantané par intégration. On obtient

$$(4) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ -gt + c_z \end{pmatrix}$$

où  $c_x$ ,  $c_y$  et  $c_z$  sont des constantes que l'on peut déterminer en utilisant les conditions initiales du problème.

Concernant ces conditions initiales, on suppose que le point matériel se situe à l'origine du repère en  $t = 0$  avec une vitesse initiale dans le plan ( $xOz$ ), ce choix étant toujours possible. Les conditions initiales du problème sont donc

$$(5) \quad \vec{r}(t = 0) = \vec{0}$$

et

$$(6) \quad \vec{v}(t = 0) = \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta \\ 0 \\ v_0 \sin \theta \end{pmatrix}$$

où  $v_0 = \|\vec{v}(t = 0)\|$  est la valeur de la vitesse instantanée initiale et  $\theta$  est l'angle entre le vecteur  $\vec{v}(t = 0)$  et l'axe des abscisses ( $Ox$ ).

En reprenant l'Eq. (4) pour l'instant initial  $t = 0$ , on obtient les valeurs des trois constantes  $c_x$ ,  $c_y$  et  $c_z$ .

$$(7) \quad \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta \\ 0 \\ v_0 \sin \theta \end{pmatrix}$$

On en déduit l'expression générale du vecteur vitesse

$$(8) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta \\ 0 \\ -gt + v_0 \sin \theta \end{pmatrix}$$

On peut intégrer une seconde fois par rapport à  $t$  afin d'obtenir les coordonnées

cartésiennes du point matériel en fonction du temps, c'est à dire, les équations horaires du mouvement. Il vient

$$(9) \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta t + c'_x \\ c'_y \\ -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin \theta t + c'_z \end{pmatrix}$$

$c'_x$ ,  $c'_y$  et  $c'_z$  sont trois nouvelles constantes dues à l'intégration des équations. On les détermine également avec les conditions initiales : l'expression ci-dessus en  $t = 0$  doit coïncider avec le vecteur nul comme il est écrit dans l'Eq. (5). Ainsi

$$(10) \quad \begin{pmatrix} c'_x \\ c'_y \\ c'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient de cette manière les équations horaires du mouvement.

$$(11) \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta t \\ 0 \\ -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin \theta t \end{pmatrix}$$

Ce qui est équivalent à la donnée des trois équations suivantes

$$(12) \quad \begin{cases} x = v_0 \cos \theta t \\ y = 0 \\ z = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin \theta t \end{cases}$$

Les coordonnées cartésiennes sont donc des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 2 comme fonctions du temps. Puisque l'ordonnée  $y$  est nulle, le mouvement se fait dans un plan. En effet, d'une manière générale et indépendamment du repère considéré, le mouvement se fait toujours dans le plan engendré par les vecteurs  $\vec{g}$  et  $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0)$ .

Il est aussi possible d'établir l'équation de la trajectoire  $z = f(x)$ . Pour cela, on isole le temps  $t$  dans la première ligne de (12).

$$(13) \quad t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$$

Et on injecte ensuite cette expression pour  $t$  dans la troisième ligne de l'Eq. (12) qui donne la cote. On aboutit ainsi à

$$(14) \quad \boxed{z = f(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + \tan \theta x}$$

La courbe décrite par cette fonction est une parabole tournée vers le bas puisque le coefficient devant le  $x^2$  est toujours négatif.<sup>iii</sup>

<sup>iii</sup> Ceci est physiquement intuitif : comme une balle que l'on lancerait en hauteur, la vitesse initiale propulse l'objet vers le haut puis celui-ci retombe en raison de la pesanteur. Ainsi, la courbe est toujours une parabole tournée vers le bas.

L'équation ci-dessus caractérise le problème ; on peut notamment en déduire la portée et la flèche associées à ce mouvement parabolique.

La portée s'identifie à la distance séparant l'origine du point le plus loin de la trajectoire alors que la flèche correspond à la hauteur du point le plus haut de la parabole.

Par exemple, on considère un projectile lancé depuis l'origine avec une vitesse initiale de  $8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et avec un angle de 45 degrés. Dans ce cas, l'équation de la trajectoire (14) s'écrit simplement

$$(15) \quad z = -0,15x^2 + x$$

où l'on a utilisé la valeur approchée  $g \simeq 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . La portée s'obtient alors facilement en imposant une altitude nulle :

$$(16) \quad 0 = 0,15x^2 + x \quad \text{avec} \quad x \neq 0$$

La solution de l'équation est

$$(17) \quad x = \frac{1}{0,15} \simeq 6,67$$

Ainsi, la balle atteint une distance de 6,67 m.

Concernant la flèche, l'abscisse pour laquelle la balle est le plus haut est donnée par<sup>iv</sup>

$$(18) \quad x_f = \frac{1}{0,3} \simeq 3,33$$

Puis, on injecte cette valeur dans l'expression de la cote

$$(19) \quad z = -0,15 \times 3,33^2 + 3,33 \simeq 1,67$$

Ceci constitue un exemple de calcul de flèche : la balle atteint donc une hauteur maximale de 1,67 m.<sup>v</sup>

---

<sup>iv</sup>Pour un trinôme  $ax^2 + bx + c$ , l'abscisse du sommet de la parabole est obtenue par la formule :

$$x_f = -\frac{b}{2a}$$

<sup>v</sup>Bien sur, ces calculs peuvent être faits de manière générale sans fixer  $v_0$  ni  $\theta$ . En procédant de la même façon que dans l'exemple simple ci-dessus et en se basant sur l'Eq. (14), on obtient l'expression générale de la portée

$$x_p = \frac{2v_0^2 \cos \theta \sin \theta}{g}$$

et, concernant la flèche, on trouve

$$z_f = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g} - \frac{\tan^2 \theta}{2}$$

## A.2 Accélération par un champ électrique

On considère désormais une charge ponctuelle plongée dans un champ électrique  $\vec{E}$  uniforme dans l'espace et constant dans le temps. Le poids est parfaitement négligeable au niveau microscopique et l'on ne prend pas en compte non plus les forces de frottement.

Cette situation s'applique bien à des particules chargées situées entre les armatures d'un condensateur plan.

Un condensateur est formé par deux armatures conductrices en regard l'une de l'autre et par l'espace les séparant, les charges des armatures étant opposées. Les condensateurs peuvent être sphériques, cylindriques ou plans. On peut montrer que<sup>vi</sup>, pour un condensateur plan, la champ électrique entre les armatures est uniforme et constant ; il est dirigé de l'armature chargée positivement vers celle chargée négativement.<sup>vii</sup>

La seconde loi de Newton, combinée à la loi de Coulomb, permettent d'écrire

$$(20) \quad \boxed{\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E}}$$

Comme dans le paragraphe précédent, le mouvement est uniformément varié.

On choisit le repère de manière à avoir le champ électrique selon l'axe  $(Oy)$ .<sup>viii</sup>

$$(21) \quad \vec{E} = E \vec{j}$$

À l'instant initial, la charge est à l'origine  $O$  du repère avec une vitesse initiale dans le plan  $(xOy)$  c'est à dire

$$(22) \quad \vec{v}(t=0) = \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta \\ v_0 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

On procède comme pour la chute libre dans la section précédente en intégrant deux fois l'Eq. (20) tout en déterminant les constantes d'intégration grâce aux conditions initiales. On obtient de cette façon les équations horaires du mouve-

---

<sup>vi</sup>Les calculs d'électrostatique reposent sur les principes de symétrie appelés principes de Curie et sur le théorème de Gauss. Ce dernier constitue, en fait, l'une des quatre équations fondamentales de Maxwell.

<sup>vii</sup>L'intensité du champ électrique entre les armatures vaut alors

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

où  $\sigma$  est la densité surfacique de charge des armatures du condensateur et  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide ; c'est une constante fondamentale de la physique  $\epsilon_0 \simeq 8,85 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \text{ s}^4 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-3}$ .

<sup>viii</sup>Ce choix est toujours possible.

ment.

$$(23) \quad \begin{cases} x = v_0 \cos \theta t \\ y = \frac{qE}{2m} t^2 + v_0 \sin \theta t \\ z = 0 \end{cases}$$

Le mouvement se fait donc dans le plan  $(xOy)$ , c'est à dire, dans le plan engendré par les vecteur champ électrique  $\vec{E}$  et vitesse initiale  $\vec{v}_0$ .

En éliminant le temps dans les équations ci-dessus, on établit enfin l'équation de la trajectoire  $y = f(x)$ .

$$(24) \quad \boxed{y = f(x) = \frac{qE}{2mv_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + \tan \theta x}$$

On retrouve donc ici aussi un mouvement parabolique avec une parabole tournée vers le haut, c'est à dire, dans le sens des  $y$  croissants si la charge  $q$  est positive. Ainsi, les charges positives sont déviées dans le sens du champ électrique et les charges négatives dans le sens opposé.

Il est possible de montrer que le champ entre les armatures du condensateur plan peut aussi s'écrire

$$(25) \quad \boxed{\vec{E} = \frac{U}{d} \vec{j}}$$

où  $U$  et  $d$  sont respectivement la tension électrique et la distance entre les plaques métalliques alors que  $\vec{j}$  est un vecteur orthogonal aux armatures et dirigé de la plaque chargée positivement vers celle chargée négativement.

## B Mouvement dans un champ de gravitation

Cette partie traite de l'exemple bien connu de la gravitation des corps massifs. On étudie d'abord l'approximation de l'orbite circulaire dans laquelle les calculs peuvent être menés facilement. Le second paragraphe constitue ensuite une présentation des lois générales de Kepler.

### B.1 Approximation de l'orbite circulaire

On parle d'orbite pour la trajectoire d'un satellite plongé dans un champ de gravitation créé par une masse centrale.

On étudie ici un corps assimilé à un point matériel  $M$  de masse  $m$  soumis à la force de gravitation exercée par un second corps massif de masse  $m_0$  où

$m_0$  est bien supérieure à  $m$ . La masse centrale est supposée immobile dans le référentiel d'étude et située à l'origine du repère.

Dans cette sous-section, on fait l'approximation suivante :

L'orbite du point matériel est circulaire.

On souligne que cette hypothèse est une version simplifiée de la première loi de Kepler (cf. section suivante).

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au point matériel étudié prend la forme

$$(26) \quad m \vec{a} = \vec{F}_G$$

où  $\vec{F}_G$  est la force de gravitation qui, dans l'approximation circulaire, s'écrit

$$(27) \quad \vec{F}_G = -G \frac{m m_0}{R^2} \vec{u}_r$$

où  $G$  est la constante de gravitation,  $R$  est la rayon de l'orbite et  $\vec{u}_r$  est un vecteur unitaire radial dirigé vers l'extérieur du cercle, c'est à dire,

$$(28) \quad \vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{R}$$

Les Eqs (26) et (27) fournissent l'expression de l'accélération.

$$(29) \quad \vec{a} = -G \frac{m_0}{R^2} \vec{u}_r$$

Celle-ci est centripète<sup>ix</sup> et sa valeur  $a = Gm_0/R^2$  est une constante du mouvement.

On rappelle l'expression générale de l'accélération dans la base de Frenet ( $\vec{e}_T, \vec{e}_N$ ) introduite dans le premier cours abordant la cinématique.

$$(30) \quad \vec{a} = \dot{v} \vec{e}_T + \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_N$$

où le rayon de courbure de la trajectoire  $\rho$  s'identifie simplement ici au rayon  $R$  de la trajectoire circulaire et

$$(31) \quad \vec{e}_N = -\vec{u}_r$$

par définition de ces deux vecteurs.

---

<sup>ix</sup>C'est à dire qu'elle est radiale et dirigée vers le centre du cercle.

En comparant les expressions (29) et (30), on peut caractériser le mouvement. On en déduit en effet

$$(32) \quad \dot{v} = 0 \text{ et } v = \sqrt{\frac{G m_0}{R}}$$

Ainsi, le mouvement est uniforme et le carré de la vitesse est proportionnel à la masse centrale et inversement proportionnel au rayon de l'orbite. Le fait que le mouvement soit uniforme est un cas trivial de la seconde loi de Kepler comme cela sera détaillé dans la suite.

Enfin, en notant  $T$  la période de révolution du point matériel c'est à dire le temps mis par celui-ci pour parcourir un tour entier, on a la relation

$$(33) \quad v = \frac{2\pi R}{T}$$

En utilisant cette expression ainsi que celle de l'Eq. (32), on établit

$$(34) \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{G m_0} R^3$$

Le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du rayon de la trajectoire ; on pourra noter

$$(35) \quad \boxed{T^2 \propto R^3}$$

On retombe, là encore, sur un cas particulier de la troisième loi de Kepler.

## B.2 Lois de Kepler

Les lois de Kepler sont générales et valables pour tout corps gravitant autour d'un second astre massif.

Rigoureusement, elles sont valables dans le référentiel dit barycentrique ou référentiel du centre de masse : c'est le référentiel dans lequel le centre de masse des deux corps est immobile. Cela dit, puisque la masse du satellite est parfaitement négligeable par rapport à celle de l'astre central, on peut faire l'approximation quand ce référentiel correspond à celui où la masse centrale est fixe.

On insiste sur le fait que ce ne sont pas des postulats mais bel et bien des conséquences de la mécanique de Newton dans le cadre du problème à deux corps. Les lois de Kepler seront démontrées en toute généralité en annexe de ce cours.

La notion d'ellipse est nécessaire pour assimiler la suite ; on s'attarde, dans un premier temps, à en donner une définition.

Une ellipse est une courbe plane obtenue par intersection d'un cône de révolution avec un plan non parallèle à l'axe du cône ; c'est un cas particulier de conique.\* Les coniques et quelques unes de leurs propriétés seront également discutées dans un cours ultérieur.

On peut donner une définition équivalente de l'ellipse : étant donnés deux points quelconques  $F$  et  $F'$ , une ellipse s'identifie à l'ensemble des points  $M$  dont la somme de la distance à  $F$  et de la distance à  $F'$  est constante. Par commodité et par convention, on notera  $2a$  cette somme constante.

$$(36) \quad MF + MF' = 2a$$

Les points  $F$  et  $F'$  sont appelés foyers de l'ellipse.

On note que cette courbe est une généralisation du cercle, obtenu comme cas particulier de l'ellipse lorsque les foyers sont confondus. Dans le cas du cercle,  $F = F'$  est le centre et  $a$  le rayon. Une ellipse est, en fait, un cercle aplati et  $a$  s'identifie à la distance entre le milieu  $O$  du segment  $[FF']$  et le point qui en est le plus éloigné sur la courbe. On appelle  $a$  le demi-grand axe de l'ellipse. Cette dernière possède aussi un demi-petit axe noté  $b$  et, dans un repère cartésien dont l'origine  $O$  est au milieu des foyers, son équation est la suivante

$$(37) \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

On admet ici ce résultat ; là aussi, pour  $a = b$ , on retrouve bien l'équation d'un cercle de rayon  $a$ .

Enfin, sur le plan du vocabulaire, on appelle plan elliptique le plan dans lequel se dessine l'ellipse.

Cette introduction aux ellipses faite, on en vient aux lois de Kepler :

Première loi de Kepler/Loi des orbites :

⇒ Le satellite présente un mouvement plan et sa trajectoire est une ellipse dont l'astre massif central est l'un des foyers.

---

\*Une conique correspond à une courbe plane obtenue par intersection d'un cône de révolution infini avec un plan. Si l'inclinaison du plan est inférieure à l'angle d'ouverture du cône, on obtient une hyperbole. Autrement, si l'angle d'inclinaison est égal à l'angle d'ouverture du cône, la courbe obtenue est une parabole. Enfin, si l'angle d'inclinaison du plan est supérieur à l'angle d'ouverture du cône, on obtient la courbe qui nous intéresse ici : l'ellipse. On note que l'ellipse peut être un cercle si le plan est orthogonal à l'axe du cône.

Seconde loi de Kepler/Loi des aires :

⇒ En notant  $F$  le foyer de l'ellipse où se situe l'astre central, le segment  $[MF]$  balaie des surfaces égales en des durées égales.

Troisième loi de Kepler/Loi des périodes :

⇒ Le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse :

$$(38) \quad T^2 \propto a^3$$

On déduit de la seconde loi que la vitesse du corps en orbite n'est pas constante. Elle est élevée lorsque le corps est proche du foyer où se trouve l'astre central et faible quand il en est le plus éloigné. On parle de périhélie pour le point de la trajectoire où la vitesse est maximale et d'aphélie concernant le point où la vitesse est minimale.

Les lois de Kepler ont d'abord été énoncées pour le mouvement des planètes gravitant autour de soleil. On note que, dans ce cas, les trajectoires elliptiques sont quasiment circulaires.<sup>xi</sup>

---

<sup>xi</sup> On parle d'ellipse de très faible excentricité. L'excentricité d'une ellipse de demi-grand axe  $a$  et de demi-petit axe  $b$  est donnée par

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Ainsi, si  $a \simeq b$  comme dans le cas circulaire, on obtient une excentricité quasi nulle.

# I Exercices d'application

## I.1 Applications simples

### Exercice 1 :

Deux corps de masses différentes (1 kg et 2 kg) tombent à partir d'une même hauteur  $h$ , dans le vide, sans vitesse initiale. Quel est le corps qui arrive au sol le premier ? Justifier

### Exercice 2 :

On laisse tomber, en négligeant la résistance de l'air, un corps d'une falaise haute de 100 m. Quel est le temps de chute jusqu'au sol ?

### Exercice 3 :

On laisse tomber, en négligeant la résistance de l'air, deux corps à une seconde d'intervalle. A quelle distance l'un de l'autre seront-ils 5 secondes après le départ du premier ?

### Exercice 4 :

Un corps lancé verticalement vers le haut à partir du sol parvient à une altitude de 10 m. Avec quelle vitesse initiale a-t-il été lancé ?

### Exercice 5 :

Un avion volant horizontalement à 700 m d'altitude avec une vitesse de 180 km/h largue un colis. Quelle est la durée de chute du colis ? Quelle distance horizontale a-t-il parcouru ? Quelle est la vitesse du colis quand il touche le sol ?

### Exercice 6 :

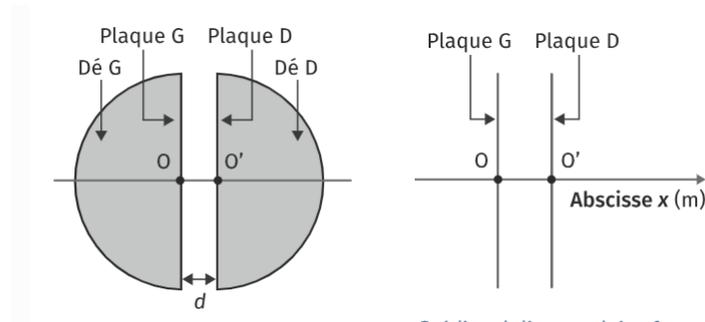
Une balle de football est lancée du sol à la vitesse de 20 m/s. Calculer sa portée si l'angle de tir vaut  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $60^\circ$ .

## I.2 Problèmes

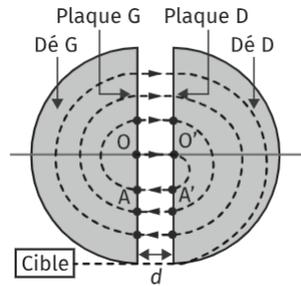
### Problème A :

La tomographie par émission de positons est un examen reposant sur la détection de positons (antimatière de l'électron). Ils sont émis par un élément chimique que l'on injecte au patient et qui doit être produit à l'hôpital. Pour cela, on bombarde au moyen d'un cyclotron des noyaux d'oxygène 18 par des protons dont l'énergie cinétique est de 16 MeV. Les protons placés au point  $O$  sont accélérés jusqu'au point  $O'$  où ils pénètrent dans la partie droite du cyclotron.

À  $t = 0$ , un proton est introduit dans le cyclotron au point  $O$  sans vitesse initiale. La tension accélératrice  $U$  vaut 30 kV. On se place sur l'axe  $(Ox)$  horizontal, centré sur  $O$  et dirigé vers la droite. On note  $d = OO'$  la distance entre les plaques.



1. Montrer que le poids du proton est négligeable devant la force électrique.  
Données : charge élémentaire  $e \simeq 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ , distance entre les plaques  $d = 2\text{mm}$ , masse du proton  $m_p \simeq 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ .
2. Compléter le schéma des plaques  $G$  et  $D$  de la figure ci-dessus et y faire figurer, en justifiant et sans souci d'échelle le vecteur  $\vec{F}$  représentant la force électrique et le vecteur champ électrique  $\vec{E}$  entre les plaques.
3. Établir l'expression de l'accélération  $\vec{a}$  du proton entre  $O$  et  $O'$  en fonction de  $\vec{E}$ ,  $e$  et  $m_p$ .
4. En déduire l'équation horaire du mouvement  $x(t)$ .
5. En déduire la durée  $\Delta t$  mise par le proton pour aller de  $O$  à  $O'$ .



6. Le mouvement du proton entre  $O'$  et  $A'$  est circulaire uniforme (voir figure ci-dessus). En déduire la relation entre la vitesse  $v$ , le rayon  $R$  et la durée  $\Delta t_2$  de ce demi-tour.
7. Le mouvement circulaire est dû à un champ magnétique  $B$  et la rayon de la trajectoire est donné par
- $$R = \frac{m_p v}{e B}$$
- En déduire une expression de  $\Delta t_2$  en fonction de  $m_p$ ,  $e$  et  $B$ .
8. Pourquoi les demi-tours suivants ont la même durée ?
9. Sachant que la force magnétique ne travaille pas lors de la partie circulaire du mouvement, autrement dit, seule la force électrique s'appliquant entre  $O$  et  $O'$  apporte un travail, pouvez-vous estimer le nombre de tours nécessaires au protons afin qu'il atteigne une énergie de 16 MeV. Vous pourrez utiliser le théorème de l'énergie cinétique.