Questions avancées sur les fonctions réelles

⋆ **Exercice 1** *Problème*

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 4x^3 - 3x - 8$$

et soit la fonction f définie sur $]1/2; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{4x^2 - 1}$$

1. Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
3. Donner le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer la limite de f en $+\infty$
5. calculer la limite de f en $1/2$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
6. Montrer que
$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(4x^2 - 1)^2}$$
7. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de f.
8. Montrer que $f(\alpha) = 3\alpha/8$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.
9. On considère la droite $\mathcal{D} : y = x/4$. Avec la calculatrice, conjecturer les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$.
10. Pour tout réel $x > 1/2$, on considère les points M et N d'abscisse x respectivement sur $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$. Que vaut la distance MN lorsque x tend vers $+\infty$?

⋆ **Exercice 2** *Fonction sinus hyperbolique*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction sinus hyperbolique par

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Calculer les limites de sinh en $\pm\infty$.
2. Dresser le tableau de variation de sinh sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{R}$, l'équation $\sinh(x) = k$ admet une unique solution réelle que l'on notera α_k.
4. Déterminer un encadrement de α_1 à 10^{-2} près.
5. Déterminer un encadrement de α_{10} à 10^{-2} près.

⋆ **Exercice 3**

Soit la fonction f définie par la relation algébrique suivante

$$f(x) = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

1. Déterminer le domaine de définition $D_f \subset \mathbb{R}$.
2. Calculer les limites aux bornes du domaine.
3. Calculer l'expression de la dérivée $f'(x)$.
4. En déduire le tableau de variation complet de la fonction f sur D_f.

⋆ **Exercice 4** *Une fonction trigonométrique*

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2\cos^2(x)$$

1. Quelle est la périodicité de g ?
2. Expliquer pourquoi g n'admet pas de limite en $\pm\infty$.
3. Calculer l'expression de la dérivée $g'(x)$.
4. En déduire le tableau de variation de g sur $[0; 2\pi]$.

⋆ **Exercice 5** *Étude de la convexité et position des tangentes*

Soit la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\phi(x) = \left(x^4 - 10x^3 + 44x^2 - 109x + 128\right) e^{x-4}$$

1. Établir l'expression de la dérivée seconde $\phi''(x)$ de la fonction ϕ et l'écrire sous la forme
$$\phi''(x) = P(x)\, e^{x-4}$$
où $P(x)$ est un polynôme de degré 4.

2. Montrer que 1 et -2 sont racines de P et en déduire une factorisation complète du polynôme P.

3. En déduire la convexité de ϕ sur $\mathbb{R}$ et les abscisses des éventuels points d'inflexion.

4. Soient T_{-1}, T_2 et T_3 les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_\phi$ aux points d'abscisses respectives $a = -1$, $a = 2$ et $a = 3$. Étudier la position relative de ces trois droites par rapport à la courbe $\mathcal{C}_\phi$.

5. En déduire l'inégalité suivante vérifiée pour tout réel x :
$$\phi(x) > e\, x + 4e$$