Études de fonctions trigonométriques

⋆ Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + 2\cos x$$

1. Calculer la dérivée $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que f est décroissante sur le segment $[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}]$.

⋆ Exercice 2

Calculer les dérivées des fonctions suivantes

$$f(x) = 3\,\cos(3x+5) \quad \text{et} \quad g(x) = x^3 \cos x$$

$$h(x) = \frac{3}{5}\,\cos(5x-3) + 4\,\sin(-\frac{3}{4}x+1)$$

$$k(x) = \frac{\sin x}{x}$$

⋆ Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2\cos(2x) - 1$$

1. Résoudre $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la plus petite période de la fonction f.
3. Montrer que l'on peut restreindre l'étude de la fonction f à l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$.
4. Établir le tableau de variation de f sur $[-\pi; \pi]$

$\star$ **Exercice 4**

Soit la fonction l définie sur $[-\pi;\pi]$ par

$$l(x) = ax + b\cos x + c$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. Sachant que la tangente à $\mathcal{C}_l$ au point d'abscisse $-\frac{\pi}{2}$ est horizontale, que $B(0;3) \in \mathcal{C}_l$ et que la tangente en B a un coefficient directeur égal à -2, déterminer les valeurs des paramètres a, b et c.

2. Avec les valeurs de a, b et c déterminées précédemment, montrer que l est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que l'équation $l(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ et encadrer α au dixième.

4. En déduire le signe de $l(x)$ sur $\mathbb{R}$.